

Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026

Índice

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Variedades Invariantes | 1 |
| 1 | Variedad Central | 3 |
| 1.1 | Suavidad de Variedad Central Global | 15 |
| 1.2 | Sobre la Suavidad según contracción de Fibras | 37 |
| 1.3 | Variedad Central Local | 38 |
| 2 | Variedades Invariantes Hiperbólicas | 51 |
| 2.1 | Computación de Variedades Invariantes | 53 |

Capítulo 1

Forma Normal Lineal

1 Forma Normal

1.1 Forma Normal de Poincaré-Birkhoff

Comentario 1.1. Buscamos un cambio de coordenadas local que preserve la parte lineal, a fin de poder lograr estudiar cómo los distintos tipos de perturbaciones sobre la parte lineal afecta a la modificación de la "forma normal" que represente al campo vectorial.

Como empezamos el capítulo estudiando los puntos de equilibrio no hiperbólicos, todos los resultados asumirán que los cambios de coordenadas sobre puntos de equilibrio toman la forma del nuevo campo vectorial. La mayoría de los resultados siguientes están dados de forma directa en el texto de **chow1994normal**

Proposición 1.2 (Parte lineal de un cambio de coordenadas). *Sea $\dot{x} = A_X x + f(x)$ E.D.O. con campo X y $A_X := DX(0)$, $f(x) := X(x) - DX(0)x$, y con singularidad (punto de equilibrio) en el origen.*

Entonces la parte lineal del sistema tras el cambio de coordenadas local $x = \xi(y)$, verificando $\xi(0) = 0$ es:

$$A_Y := DY(0) = (D\xi(0))^{-1} A_X D\xi(0)$$

Demostración. Recordemos que el campo tras el cambio de coordenadas es $Y(y) := (D\phi(y))^{-1} X(\phi(y)) = (D\phi(y))^{-1} A(\phi(y)) + (D\phi(y))^{-1} f(\phi(y))$

Luego operando:

$$\begin{aligned} DY(0) &= D((D\phi(y))^{-1} A(\phi(y)) + (D\phi(y))^{-1} f(\phi(y)))(0) \\ &= D((D\phi(y))^{-1} A(\phi(y)))(0) + D((D\phi(y))^{-1} f(\phi(y)))(0) \\ &= D((D\phi(y))^{-1})(0) A(\phi(0)) + (D\phi(0))^{-1} D(A(\phi(y)))(0) \\ &\quad + D((D\phi(y))^{-1})(0) f(\phi(0)) + (D\phi(0))^{-1} D(f(\phi(y)))(0) \end{aligned}$$

Como $\phi(0) = 0$ y $f(0) = X(0) - DX(0)0 = 0 - 0 = 0$, $Df(0) = DX(0) - D(A(\cdot))(0) = DX(0) - A = 0$ por ser cambio de coordenadas local y el origen punto de equilibrio, entonces el primer, tercer y último término se anulan, resultando en:

$$\begin{aligned}
DY(0) &= (D\phi(0))^{-1}D(A(\phi(y)))(0) \\
&= D\phi^{-1}(0)D(A(\cdot))(\phi(0))D\phi(y)(0) \\
&= D\phi^{-1}(0)AD\phi(0)
\end{aligned}$$

Renombrando $\xi := \phi$, $A_Y := DY(0)$, $A_X := A$ se obtiene el resultado. \square

Comentario 1.3. La proposición anterior puede particularizarse usando $\xi(y) := By$. De donde se sigue el corolario.

Corolario 1.4 (Parte lineal de cambio de coordenadas lineal). *Sea $\dot{x} = A_X x + f(x)$ E.D.O. con campo X y $A_X := DX(0)$, $f(x) := X(x) - DX(0)x$, y con singularidad (punto de equilibrio) en el origen.*

Entonces la parte lineal del sistema tras el cambio de coordenadas local $x = By$, donde $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, es:

$$A_Y := BA_X B$$

Proposición 1.5 ($x = z + \xi(z) \Rightarrow A_Z = A_X$). *Cambios de coordenadas de la forma $x = z + \xi(z)$ (donde ξ es un difeomorfismo que verifique $\xi(z) \in \mathcal{O}(|z|^2)$ cuando $z \rightarrow 0$), preservan parte lineal*

Demostración. Por condición de ξ :

$$\xi(z) = \xi(0) + |z|D\xi(0) + \mathcal{O}(|z|^2) \Rightarrow |z|D\xi(0) = \mathcal{O}(|z|^2) \Rightarrow D\xi(0) = 0$$

Ahora bien, por proposición anterior:

$$\begin{aligned}
\phi(z) = z + \xi(z) &\Rightarrow D\phi(z) = \text{Id} + D\xi(z) \\
&\Rightarrow D\phi^{-1}(0)AD\phi(0) = (\text{Id} + D\xi(0))^{-1}A(\text{Id} + D\xi(0)) \\
&\Rightarrow A_Y = \text{Id}^{-1}A(\text{Id}) = A_X
\end{aligned}$$

\square

Definición 1.6 (Polinomios homogéneos). Definimos el espacio H_n^k espacio de polinomios homogéneos en n -variables y grado k :

$$H_n^k := \{p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha x_j^{\alpha_j}\}$$

Lema 1.7 (Polinomios homogéneos). *Si un f de orden mayor igual a 2 se compone de una perturbación de la identidad por un polinomio homogéneo de grado k . Entonces resulta en $f +$ un polinomio de orden $k + 1$*

Proposición 1.8 ($x = y + \xi^k(y) \Rightarrow A_Y = A_X$). *Cambios de coordenadas de la forma $x = y + \xi(y)$ (donde $\xi \in H_n^k$ es un polinomio homogéneo en n varbles, de grado k), preservan parte lineal*

Demostración. De manera análoga a la proposición anterior, recordemos que:

$$\begin{aligned}\phi(y) = y + \xi^k(y) &\Rightarrow D\phi(y) = \text{Id} + D\xi^k(y) \\ &\Rightarrow (D\phi(y))^{-1} = (\text{Id} + D\xi^k(y))^{-1} = \text{Id} - D\xi^k(y) + \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r D^r \xi^k(y) \\ &\Rightarrow (D\phi(y))^{-1} = \text{Id} - D\xi^k(y) + \mathcal{O}(|y|^{2k-2})\end{aligned}$$

Lo último siendo dado por la serie de Von Neumann (para ξ^k suficientemente pequeño el operador $\|D\xi^k(y)\| < 1$ entonces está bien definida y como $D\xi^k(y) \in H_n^{k-1} \Rightarrow \forall r \geq 2, D^r \xi^k(y) \in H_n^{r(k-1)} \subseteq \mathcal{O}(|y|^{r(k-1)}) \subseteq \mathcal{O}(|y|^{2(k-1)})$.

De donde:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (D\phi(y))^{-1} A(\phi(y)) + (D\phi(y))^{-1} f(\phi(y)) \\ \Rightarrow \dot{y} &= (\text{Id} - D\xi^k(y) + \mathcal{O}(|y|^{2k-2})) A(y + \xi^k(y)) + (\text{Id} - D\xi^k(y) + \mathcal{O}(|y|^{2k-2})) f(y + \xi^k(y)) \\ &\Rightarrow \dot{y} = Ay - D\xi^k(y)Ay + A\xi^k(y) - D\xi^k(y)A\xi^k(y) \\ &+ \mathcal{O}(|y|^{2k-2})A(y + \xi^k(y)) + f(y + \xi^k(y)) - D\xi^k(y)f(y + \xi^k(y)) + \mathcal{O}(|y|^{2k-2})f(y + \xi^k(y)) \\ &\Rightarrow \dot{y} = Ay - D\xi^k(y)Ay + A\xi^k(y) + f(y + \xi^k(y)) + \mathcal{O}(|y|^{k+1}) \\ &\Rightarrow \dot{y} = Ay - D\xi^k(y)Ay + A\xi^k(y) + f(y) + p(y) + \mathcal{O}(|y|^{k+1}) \\ &\Rightarrow \dot{y} = Ay + \left(A\xi^k(y) - D\xi^k(y)Ay \right) + f(y) + \mathcal{O}(|y|^{k+1})\end{aligned}$$

De donde se preserva la parte lineal. □

Definición 1.9 (Adjunta L_u). Definimos a la operación

$$\begin{aligned}\times : C^1 \times C^1 &\rightarrow C^1 \\ (u, v) &\mapsto u \times v(y) := Du(y).v(y)\end{aligned}$$

Es inmediato ver que esta operación es bien definida, bilineal, distributiva.

De donde definimos a la operación $[\cdot, \cdot]$ de Lie inducida por:

$$\begin{aligned}[\cdot, \cdot] : C^1 \times C^1 &\rightarrow C^1 \\ (u, v) &\mapsto [u, v](y) := u \times v(y) - v \times u(y)\end{aligned}$$

Fijando un $v \in C^1$, se define la función adjunta:

$$\begin{aligned}L_v : C^1 &\rightarrow C^1 \\ u &\mapsto [u, v]\end{aligned}$$

Proposición 1.10 (($\text{Diff}^1, [\cdot, \cdot]$) es álgebra de Lie). *Con la operación corchete $[\cdot, \cdot]$ definida anteriormente, el conjunto de los difeomorfismo es un álgebra de Lie.*

Demostración. Por teoría de álgebras de Lie, la operación Bracket definida cumple la condición de Jacobi, al ser inducida por una operación asociativa. Ahora bien, tenemos que verificar la existencia del inverso y de la composición. Esto es inmediato verificando la identidad que caracteriza a las álgebras de Lie. \square

Corolario 1.11. *Cambios de coordenadas de la forma $x = y + \xi(y)$ (donde $\xi \in H_n^k$ es un polinomio homogéneo en n variables, de grado k), preservan parte lineal y no lineal, y dejan al campo con la forma:*

$$\dot{y} = Ay - L_A(\xi^k)(y) + f(y) + \mathcal{O}(|y|^{k+1})$$

Teorema 1.12 (A-Forma Normal). *Sea un campo de clase C^{k+1} , definamos la parte lineal y no lineal $A := DX(0)$ y $f := X - A$ resp.*

Supongamos que:

$$\forall l \in \{1, \dots, k\}, \exists \mathcal{C}^l \leq H_n^l : H_n^l = L_A^l(H_n^l) \oplus \mathcal{C}^l$$

Entonces existe un cambio de coordenadas suave de forma que el P.V.I. admite la siguiente escritura:

$$\dot{y} = Ay + \sum_{l=2}^k g^l(x) + \mathcal{O}(|x|^{k+1})$$

donde $g^l \in \mathcal{C}^l$

Demostración. Sea $X(x) = Ax + \sum_{l=2}^k h^l(x) + \mathcal{O}(|x|^{k+1})$ expansión de Taylor del campo, con $h^l(x) \in H_n^l$.

Por la descomposición $H_n^k = L_A^k(H_n^k) \oplus \mathcal{C}^k$, podemos tomar la escritura de $h^2 = L_A^k(\xi^2) + g^2$. Ahora bien, ξ^2 es polinomio homogéneo de grado 2, y por corolario anterior:

$$\dot{y} = Y(y) = Ay + h^2(y) - L_A(\xi^2)(y) + \mathcal{O}(|y|^3) = Ay + g^2(y) + \mathcal{O}(|y|^3)$$

De donde la afirmación:

$$\exists (\xi^s : \Omega_s \rightarrow \mathbb{K}^n) : \dot{x}_s = Ax_s + \sum_{l=2}^{s-1} g^l(x_s) + h^s(x_s) \mathcal{O}(|x_s|^{k+1})$$

con $h^s \in H_n^s, g^l \in \mathcal{C}^l$, es válida para $s = 2$.

Asumimos válida para $s \in \{1, \dots, s_0 - 1\}$. Para s usamos el mismo argumento anterior, es decir, descomponemos h^s y ese polinomio que representa su parte en $L_A^k(H_n^k)$ puede reemplazarse en la ecuación, obteniendo la nueva escritura.

Por expansión de Taylor, los últimos términos hasta orden $k + 1$ serán polinomios homogéneos, con lo cual siempre podremos seguir obteniendo polinomios via forma normal hasta obtener la forma deseada. \square

Definición 1.13 (Forma Normal de Poincaré Birkhoff). *La escritura del Teorema anterior se dice la A-forma normal o la forma normal de Poincaré-Birkhoff del campo.*

Comentario 1.14. Esto quiere decir que la A-forma normal es un campo topológicamente conjugado al campo original. Luego es un representante de los campos topológicamente conjugados.

Definición 1.15 (Condiciones de A-Resonancia). Decimos que $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisface A-Resonancia si:

$$\langle \lambda, \alpha \rangle \in \sigma(A)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interno euclideo y λ es la concatenación en una lista del espectro de A . Es decir: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, para $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Un monomio $x^\alpha \in H_n^k$ se dice A-resonante si α satisface A-Resonancia

Teorema 1.16 (D -formas normales son D -resonantes). Dado $A = \text{diag}(\lambda_j)$, existe una A forma normal resonante en la cual todos los monomios de la parte no lineal son monomios resonantes

Demostración. Aplicando el operador L_A^k a un monomio obtenemos:

$$\begin{aligned} L_A^k(x^\alpha e_j)(y) &= D(x^\alpha e_j)(y)Ay - Ay^\alpha e_j \\ &= \sum_{r=1}^n D(x^\alpha e_j)(y)\lambda_r y_r e_r - y^\alpha A e_j \\ &= \sum_{r=1}^n \lambda_r y_r D(x^\alpha e_j)(y)e_r - y^\alpha \lambda_j e_j \\ &= \left(\sum_{r=1}^n \lambda_r \alpha_r y^\alpha e_j \right) - \lambda_j y^\alpha e_j \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_j \right) y^\alpha e_j - \lambda_j y^\alpha e_j \\ &= (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_j) y^\alpha e_j \end{aligned}$$

Como $\text{Ker}(L_A^k)$ es un subespacio complementario a la imagen, por L_A^k operador, entonces puede usarse en la demostración anterior. De donde todos los monomios que están en $\mathcal{C}^l = \text{Ker}(L_A^l)$, y por lo tanto cumplen ser A-resonantes \square

Teorema 1.17 (Forma Explícita de $[L_A^k]$). La forma explícita del operador L_A^k en la base de H_n^k es:

$$L_A^k(x^\alpha e_j) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{j,l} \frac{y_j}{y_l} y^\alpha e_i - \sum_{r=1}^n y^\alpha a_{i,r} e_r$$

Demostración. Recordemos que: $D(x^\alpha e_i)(y) = \left[\frac{\partial(x^\alpha e_i)_m}{\partial x_j} \right]_{m,j} (y) \Rightarrow D(x^\alpha e_i)(y)e_l = \left[\frac{\partial(x^\alpha e_i)_m}{\partial x_l} \right]_m = \frac{\partial(x^\alpha e_i)}{\partial x_l} e_i$

$$\begin{aligned}
L_A^k(x^\alpha e_i)(y) &= D(x^\alpha e_i)(y)Ay - Ay^\alpha e_i \\
&= D(x^\alpha e_i)(y) \sum_{l=1}^n e_l \left(\sum_{j=1}^n a_{l,j} y_j \right) - Ay^\alpha e_i \\
&= \sum_{l=1}^n D(x^\alpha e_i)(y) e_l \left(\sum_{j=1}^n a_{l,j} y_j \right) - Ay^\alpha e_i \\
&= \sum_{l=1}^n \frac{\partial(x^\alpha e_i)}{\partial x_l}(y) e_l \left(\sum_{j=1}^n a_{l,j} y_j \right) - Ay^\alpha e_i \\
&= \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_l}{y_l} y^\alpha \left(\sum_{j=1}^n a_{l,j} y_j \right) e_i - y^\alpha A e_i \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{l,j} \frac{y_j}{y_l} y^\alpha e_i - \sum_{r=1}^n y^\alpha a_{r,i} e_r \\
L_{A^*}^k(x^\alpha e_i)(y) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{j,l} \frac{y_j}{y_l} y^\alpha e_i - \sum_{r=1}^n y^\alpha a_{i,r} e_r
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.18 ($(L_A^k)^* = L_{A^*}^k$). *El operador $L_{A^*}^k$ es la adjunta de L_A^k bajo el producto interno euclídeo sobre la identificación: $H_n^k \cong \mathbb{K}^{\binom{n+k-1}{k}}$, donde A^* adjunta bajo producto interno euclídeo.*

Demostración. Computando en el producto interno con otros miembros de la base:

$$\begin{aligned}
\langle L_A^k x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{l,j} \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i - \sum_{r=1}^n x^\alpha a_{r,i} e_r, x^\beta e_t \right\rangle \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{l,j} \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle - \sum_{r=1}^n a_{r,i} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle \\
&= \begin{cases} \sum_{l=1}^n \alpha_l a_{l,l} \alpha! - a_{i,i} \alpha! & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \alpha_j a_{l,j} \beta! & , (\exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ - \sum_{r=1}^n a_{r,i} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \exists r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ 0 & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \forall r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{l,l} - a_{i,i}) \alpha! & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \alpha_j a_{l,j} \beta! & , (\exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ - a_{t,i} \alpha! & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \exists r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases}
\end{aligned}$$

Recordemos que $\overline{\langle L_{A^*}^k x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle} = \langle x^\beta e_t, L_A^k x^\alpha e_i \rangle$. Por el resultado anterior:

$$\begin{aligned}
\overline{\langle L_{A^*}^k x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle} &= \begin{cases} \overline{(\sum_{l=1}^n \alpha_l \overline{a_{l,l}} - \overline{a_{i,i}}) \alpha!} & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \overline{\alpha_l \overline{a_{j,l}} \beta!} & , (\exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ -\overline{a_{i,t} \alpha!} & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \exists r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l \overline{a_{l,l}} - \overline{a_{i,i}}) \alpha! & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \alpha_l \overline{a_{j,l}} \beta! & , (\exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ -\overline{a_{i,t} \alpha!} & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \exists r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{l,l} - a_{i,i}) \alpha! & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \beta_j a_{j,l} \alpha! & , (\exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ -a_{i,t} \alpha! & , (\forall(j, l), \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 0 \wedge \exists r \in \{1, \dots, n\} \langle x^\alpha e_r, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases} \\
&= \langle L_A^k x^\beta e_t, x^\alpha e_i \rangle
\end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado □

Corolario 1.19 (Forma Matricial de $[L_A^k]$). *La forma explícita del operador L_A^k en la base de H_n^k es:*

$$[L_A^k]_{(t,\beta),(i,\alpha)} = \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{l,l} - a_{i,i}) & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \alpha_j a_{j,l} & , (i = t \wedge \exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ -a_{t,i} & , (i \neq t, \alpha = \beta) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases}$$

Corolario 1.20 ($\text{Ker}(L_{A^*}^k) = L_A^k(H_n^k)^\perp$). *Un subespacio ortogonal a $L_A^k(H_n^k)$ es $\text{Ker}(L_{A^*}^k)$*

Comentario 1.21. El algoritmo es: obtienes la E.D.P. correspondiente al desarrollo del núcleo de L_A^k con soluciones polinomios homogéneos de grado k .

Hallamos una base de polinomios homogéneos para el núcleo

Por la demostración, descomponemos la expansión de Taylor de la parte no lineal en el subespacio imagen y el núcleo de L_A^k .

Luego obtenemos los polinomios homogéneos ξ^k componentes del núcleo que forma parte de la escritura de la parte no lineal.

Hacemos el cambio de variable de la forma $x = y + \xi^k(y)$.

El cambio nos permite iterativamente repetir el proceso para $k + 1$.

Así hasta teminar la expansión posible de la parte no lineal.

Comentario 1.22. Podemos expresar más propiedades de las matrices que representan al operador adjunto, usando el hecho de que i, t representando a la fila y α, β las columnas.

Corolario 1.23 (Forma Matricial de $[L_D^k]$). *La forma explícita del operador L_D^k en la base de H_n^k (Con D diagonal) es:*

$$[L_D^k]_{(i,\alpha),(t,\beta)} = \begin{cases} \langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i, & (i, \alpha) = (t, \beta) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

De modo análogo, para matriz triangular superior, tenemos que:

$$[L_A^k]_{(t,\beta),(i,\alpha)} = \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{l,i} - a_{i,i}) & , (i, \alpha) = (t, \beta) \\ \alpha_j a_{l,j} & , (i = t \wedge \exists(j, l) \notin \Delta \subset \{1, \dots, n\} : \langle \frac{x_j}{x_l} x^\alpha e_i, x^\beta e_t \rangle = 1) \\ -a_{t,i} & , (i \neq t, \alpha = \beta) \\ 0 & , \text{para otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Sólo debemos verificar el caso triangular superior: Por el caso 3 dependiendo proporcionalmente de los valores de la matriz y el resto siendo trivialmente 0 o no importante, como en 2, donde si estuvieran por encima de la diagonal, entonces $\alpha > \beta$ de donde $l < j$ lo cual trivialmente daría valor 0. \square

Definición 1.24 (Operador Semisimple). Un operador se dice semisimple si su polinomio minimal es irreducible dentro de su cuerpo.

Teorema 1.25 (Descomposición $S - N$). *Todo operador lineal admite descomposición como suma de dos operadores $S + N$ en los cuales S es semisimple y N es nilpotente, además $SN = NS$*

Demostración. En efecto, basta complejificar el \mathbb{R} -e.v. hasta llevarlo a \mathbb{C} cuerpo algebraicamente cerrado. A partir de ello, obtenemos que podemos representar al operador en forma matricial como una matriz triangular superior, por polinomio característico factorizable en factores lineales.

Una vez en esta forma podemos descomponer la matriz en la forma deseada como la diagonal con la diferencia de la matriz y de la diagonal.

Finalmente obtenemos dos operadores que podemos transformar a su forma real, logrando obtener una matriz semisimple y una nilpotente mediante cambios de coordenadas (Equivalentes a semisimple es semisimple por preservar determinante, y por tanto polinomio minimal/característico, del mismo modo, equivalentes a nilpotente son nilpotentes por elevar a una potencia que lo anule). \square

Comentario 1.26. La unicidad de la descomposición semisimple es evidente.

En lo sucesivo, usaremos la descomposición semisimple con S diagonal sobre \mathbb{C} .

Como la forma canónica de jordan nos permite obtener la descomposición $S - N$ en forma matricial, usaremos a partir de ahora la representación matricial de los operadores.

Teorema 1.27 ($A = S + N \mapsto L_A^k = L_S^k + L_N^k$). *La descomposición semisimple-nilpotente del operador adjunta de una matriz es la suma de los operadores adjuntos de la descomposición semisimple-nilpotente.*

Demostración. Las adjuntas de los miembros de la descomposición $S - N$ verifican:

$$L_S^k(x^\alpha e_j) = (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) x^\alpha e_j$$

$$L_N^k(x^\alpha e_j) = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l a_{l,l+1} \frac{x_{l+1}}{x_l} x^\alpha e_j - x^\alpha a_{j-1,j} e_{j-1}$$

pues los términos no diagonales sólo sobreviven si $a_{i,j}$ verifica $j = i + 1$.
Aplicando la primera propiedad sobre la segunda:

$$\begin{aligned}
L_S^k L_N^k(x^\alpha e_j) &= \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l a_{l,l+1} L_S^k \left(\frac{x_{l+1}}{x_l} x^\alpha e_j \right) - a_{j-1,j} L_S^k(x^\alpha e_{j-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l a_{l,l+1} (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) \frac{x_{l+1}}{x_l} x^\alpha e_j - a_{j-1,j} L_S^k(x^\alpha e_{j-1}) \\
&= (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) \left(\sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l a_{l,l+1} \frac{x_{l+1}}{x_l} x^\alpha e_j - a_{j-1,j} x^\alpha e_{j-1} \right) \\
&= (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) L_N^k(x^\alpha e_j) \\
L_N^k L_S^k(x^\alpha e_j) &= L_N^k((\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) x^\alpha e_j) = (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_i) L_N^k(x^\alpha e_j)
\end{aligned}$$

En cada bloque $J_i = \lambda_i \text{Id} + N_i$ de la descomposición de Jordan. □

Corolario 1.28 ($F \in \text{Ker}(L_{A^*}) \iff F \in \text{Ker}(L_{S^*}) \cap \text{Ker}(L_{N^*})$). Sea $A = S + N$ descomposición semisimple-nilpotente de la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $F \in \text{Ker}(L_{A^*}) \iff F \in \text{Ker}(L_{S^*}) \cap \text{Ker}(L_{N^*})$

Demostración. Basta ver que la intersección de núcleos de la descomposición es el núcleo del operador por doble inclusión. □

Corolario 1.29 (A -forma normal con A -resonancia). Dado A con parte semisimple diagonal (puede ser sobre \mathbb{R} o \mathbb{C}), la A -forma normal puede formarse a partir de alguna elección de cambios de variables según el método, de tal forma que la parte no lineal esté conformada por monomios A -resonantes.

Demostración. Resolvemos la E.D.P. del corolario anterior. Por ser núcleo de la parte diagonal, satisface condiciones de resonancia. Como ambos sistemas de E.D.P. son equivalentes, entonces las soluciones pueden ser escogidas en el método. □

Comentario 1.30. Una A -forma normal de una matriz diagonal puede ser realificada si tenemos el cambio de coordenadas de la matriz diagonal compleja a la matriz real de rotaciones.

Ejemplo 1.31. Sea el campo dado por parte lineal $A_0 = N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$:

$$\dot{x} = A_0 x + \mathcal{O}(|x|^2)$$

1. Tenemos que el espacio de polinomios homogéneos es H_2^k y su dimensión está dada por $\dim H_2^k = 2(k+1)$ con base ordenada dada por $\beta_{H_2^k} = \{u_j(x)\}_{j=1}^{2(k+1)}$, donde:

$$u_j(x) := \begin{cases} x_1^{k+1-j} x_2^{j-1} e_2 & , j \in \{1, \dots, k+1\} \\ x_1^{2(k+1)-j} x_2^{j-(k+2)} e_1 & , j \in \{k+2, \dots, 2(k+1)\} \end{cases}$$

2. Para $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x)) \in H_2^k$:

$$\begin{aligned}
L_{A_0}^k(\xi(x))(y) &= D\xi(y)A_0y - A_0\xi(y) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(y) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(y) \end{bmatrix} A_0y - A_0\xi(y) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(y) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(y) \\ \xi_2(y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(y) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(y) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_2(y) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(y)y_2 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(y)y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi_2(y) \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow L_{A_0}^k(\xi(x)) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(y)y_2 - \xi_2(y) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(y)y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Aplicando el operador a cada elemento de la base se tiene:

$$\begin{aligned}
L_{A_0}^k(u_j(x))(y) &= \begin{cases} \begin{bmatrix} -y_1^{k+1-j}y_2^{j-1} \\ (k+1-j)y_1^{k-j}y_2^j \end{bmatrix} & , j \in \{1, \dots, k+1\} \\ \begin{bmatrix} (2(k+1)-j)y_1^{2k+1-j}y_2^{j-(k+1)} \\ 0 \end{bmatrix} & , j \in \{k+2, \dots, 2(k+1)\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -y_1^{k+1-j}y_2^{j-1}e_1 + (k+1-j)y_1^{k-j}y_2^je_2 & , j \in \{1, \dots, k+1\} \\ (2(k+1)-j)y_1^{2k+1-j}y_2^{j-(k+1)}e_1 & , j \in \{k+2, \dots, 2(k+1)\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -u_{k+1+j}(y) + (k+1-j)u_{j+1}(y) & , j \in \{1, \dots, k+1\} \\ (2(k+1)-j)u_{j+1}(y) & , j \in \{k+2, \dots, 2(k+1)\} \end{cases}
\end{aligned}$$

de donde la representación matricial del operador $L_{A_0}^k$ está dada por:

$$\begin{aligned}
[L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}} &= \begin{bmatrix} N_{k+1}^t \text{diag}(k+1-j) & 0 \\ -\text{Id} & N_{k+1}^t \text{diag}(k+1-j) \end{bmatrix} \\
&= \Pi_{r=1}^k E_r \begin{bmatrix} N_{k+1}^t \text{diag}(k+1-j) & 0 \\ 0 & N_{k+1}^t \text{diag}(k+1-j) \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \dim \text{Ker}([L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}) = 2k \\
\Rightarrow \dim \text{Ker}([L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t) &= \dim \text{Im}([L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}) = 2(k+1) - 2k = 2
\end{aligned}$$

Además:

$$[L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t = \begin{bmatrix} N_{k+1} \text{diag}(k+1-j) & -\text{Id} \\ 0 & N_{k+1} \text{diag}(k+1-j) \end{bmatrix}$$

4. Una base de $\text{Ker}([L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t)$ viene dada por dos vectores de la forma $(x, y) \in \mathbb{C}^{2(k+1)}$ con $x, y \in \mathbb{C}^{k+1}$ satisfaciendo:

$$[L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t(x, y) = 0 \iff \begin{cases} N_{k+1} \text{diag}(k+1-j)x - y = 0 \\ N_{k+1} \text{diag}(k+1-j)y = 0 \end{cases}$$

Tomando $x = e_1, y = 0$, se tiene que $[L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t(x, y) = 0$.

Asimismo, tomando de forma general $x = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j, y = \sum_{r=1}^{k+1} \beta_r e_r$:

$$\begin{aligned} [L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} N_{k+1} \text{diag}(k+1-j) \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j \right) - \sum_{r=1}^{k+1} \beta_r e_r = 0 \\ N_{k+1} \text{diag}(k+1-j) \sum_{r=1}^{k+1} \beta_r e_r = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j (k+2-j) e_{j-1} - \sum_{r=1}^{k+1} \beta_r e_r = 0 \\ \sum_{r=2}^{k+1} \beta_r (k+2-r) e_{r-1} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta_1 e_1 + \alpha_2 k e_1 + \sum_{j=3}^{k+1} \alpha_j (k+2-j) e_{j-1} - \sum_{r=3}^{k+1} \beta_r e_r = 0 \\ \beta_r = 0, \forall r \in \{2, \dots, k+1\} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\beta_1 + \alpha_2 k) e_1 + \sum_{j=3}^{k+1} \alpha_j (k+2-j) e_{j-1} = 0 \\ \beta_r = 0, \forall r \in \{2, \dots, k+1\} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\beta_1 + \alpha_2 k) = 0 \\ \alpha_j = 0, \forall j \in \{3, \dots, k+1\} \\ \beta_r = 0, \forall r \in \{2, \dots, k+1\} \end{cases} \\ &\iff x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, y = \beta_1 e_1 = -\alpha_2 k e_1 \\ &\iff (x, y) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 (e_2 + k e_{k+1+1}) \end{aligned}$$

De donde $\text{Ker}([L_{A_0}^k]_{\beta_{H_2^k}}^t) = \langle e_1, e_2 + k e_{k+2} \rangle$.

5. Podemos usar o bien la base, o algún conjunto de vectores l.i. que formen un subespacio complementario. Notamos que utilizando operaciones columnas, ni e_{k+2} ni e_2 están en la imagen. Entonces podemos tomar los subespacios complementarios a la imagen formados por $\{e_1, e_2 + k e_{k+2}\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_{k+2}\}$.

Usando el cambio de $e_1 = u_1(x) = x_1^k e_2; e_2 = u_2(x) = x_1^{k-1} x_2 e_2; e_{k+2} = x_1^k e_1$, tenemos que podemos escribir la ecuación diferencial como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^r \begin{bmatrix} k b_k x_1^k \\ a_k x_1^k + b_k x_1^{k-1} x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^r \begin{bmatrix} a_k x_1^k \\ b_k x_1^k \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^r \begin{bmatrix} 0 \\ a_k x_1^k + b_k x_1^{k-1} x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Como caso particular tenemos las A_0 formas normales de orden 2 dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{cases} x_2 + 2bx_1^2 \\ ax_1^2 + bx_1x_2 \end{cases} \\ \dot{x} &= \begin{cases} x_2 + ax_1^2 \\ bx_1^2 \end{cases} \\ \dot{x} &= \begin{cases} x_2 \\ ax_1^2 + bx_1x_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.32. Sea el campo dado por parte lineal $A_0 = J(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\dot{x} = A_0x + \mathcal{O}(|x|^2)$$

dada para curvas $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$

1. Tomamos el cambio de variables para transformar la ecuación diferencial a su forma compleja según $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_1 - ix_2$ el cual es un difeomorfismo (cambio de coordenadas) por usar la representación:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} : (x_1 + 0i, x_2 + 0i) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

En este caso, las curvas solución que resuelven la ecuación se convierten de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + f_1(x) \\ \dot{x}_2 = x_1 + f_2(x) \end{cases}$$

a la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + i\dot{x}_2 &= (-x_2 + f_1(x)) + i(x_1 + f_2(x)) \\ \Rightarrow \dot{z}_1 &= (ix_1 - x_2) + f_1(x) + if_2(x) \\ \Rightarrow \dot{z}_1 &= i(x_1 + ix_2) + f_1(x) + if_2(x) \\ \Rightarrow \dot{z}_1 &= iz_1 + f_1(x) + if_2(x) \\ \Rightarrow \dot{z}_2 &= -i\overline{z_1} + \overline{f_1(x)} - i\overline{f_2(x)} = -iz_2 + \overline{f_1(x)} - i\overline{f_2(x)} \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 &= iz_1 + f_1(x) + if_2(x) \\ \dot{z}_2 &= -iz_2 + \overline{f_1(x)} - i\overline{f_2(x)} \end{cases}\end{aligned}$$

2. De la forma anterior, tenemos que la nueva ecuación diferencial puede escribirse de la forma:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} z + \mathcal{O}(|z|^2)$$

3. Los polinomios resonantes con la parte lineal están dados por las condiciones:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \alpha \rangle \in \sigma(A) &= \{i, -i\} \\ \Rightarrow i\alpha_1 - i\alpha_2 &= \pm i \\ \Rightarrow i(\alpha_1 - \alpha_2 \mp 1) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \mp 1 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= \alpha_1 + 1, \alpha_1 - 1 \end{aligned}$$

donde α son posibles exponentes de monomios con resonancia de la parte no lineal, luego $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2$.

Analizando la paridad:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$$

De donde, para $k = 2m + 1$, tenemos que:

$$\text{Ker}(L_{A^*}^k) = \langle \{z_1^{m+1} z_2^m e_1, z_1^m z_2^{m+1} e_2\} \rangle$$

4. Una A -forma normal de hasta orden r es dada por:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= iz_1 + \sum_{j=1}^s c_j z_1^{j+1} z_2^j \\ \dot{z}_2 &= -iz_2 + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j z_1^j z_2^{j+1} \end{cases}$$

donde $2s + 1 = r$ o $2(s + 1) = r$ y $c_j \in \mathbb{C}$.

5. Regresando la ecuación diferencial mediante el cambio de coordenadas inverso al original según $x_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2, x_2 = -\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2$:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} : (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (x_1 + 0i, x_2 + 0i) \in \mathbb{C}^2$$

Se obtiene la nueva ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{z}_1 &= iz_1 + \sum_{j=1}^s c_j z_1^{j+1} z_2^j \\ \dot{z}_2 &= -iz_2 + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j z_1^j z_2^{j+1} \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \dot{x}_1 &= D(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2) = \frac{1}{2}\dot{z}_1 + \frac{1}{2}\dot{z}_2 = \frac{1}{2} \left(iz_1 + \sum_{j=1}^s c_j z_1^{j+1} z_2^j \right) + \frac{1}{2} \left(-iz_2 + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j z_1^j z_2^{j+1} \right) \\ \dot{x}_2 &= D(-\frac{i}{2}z_1 + \frac{i}{2}z_2) = -\frac{i}{2}\dot{z}_1 + \frac{i}{2}\dot{z}_2 = -\frac{i}{2} \left(iz_1 + \sum_{j=1}^s c_j z_1^{j+1} z_2^j \right) + \frac{i}{2} \left(-iz_2 + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j z_1^j z_2^{j+1} \right) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{i}{2}(z_1 - z_2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s z_1^j z_2^j (c_j z_1 + \bar{c}_j z_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s z_1^j z_2^j (-ic_j z_1 + i\bar{c}_j z_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Expresando la primera parte del lado derecho tenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s z_1^j z_2^j (c_j z_1 + \bar{c}_j z_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s z_1^j z_2^j (-i c_j z_1 + i \bar{c}_j z_2) \end{cases}$$

De donde por un último cambio expresado en la forma anterior $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_1 - ix_2$ y aprovechando $z_1 z_2 = x_1^2 + x_2^2$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (c_j z_1 + \bar{c}_j z_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (-i c_j z_1 + i \bar{c}_j z_2) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j ((\Re(c_j) + i\Im(c_j))z_1 + (\Re(c_j) - i\Im(c_j))z_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (-i(\Re(c_j) + i\Im(c_j))z_1 + i(\Re(c_j) - i\Im(c_j))z_2) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (\Re(c_j)(z_1 + z_2) + i\Im(c_j)(z_1 - z_2)) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (\Im(c_j)(z_1 + z_2) + i\Re(c_j)(z_2 - z_1)) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (\Re(c_j)x_1 - \Im(c_j)x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \sum_{j=1}^s (x_1^2 + x_2^2)^j (\Im(c_j)x_1 + \Re(c_j)x_2) \end{cases} \\ \Rightarrow \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \sum_{j=1}^s r^{2j} \begin{bmatrix} \Re(c_j) & -\Im(c_j) \\ \Im(c_j) & \Re(c_j) \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

De donde la ecuación queda reducida a la forma normal:

$$\dot{x} = J(0, 1)x + \sum_{j=1}^s \|x\|^2 J(\Re(c_j), \Im(c_j))x$$

6. Transformando a la forma polar según $z_1 = re^{i\theta}, z_2 = re^{-i\theta}$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{z}_1 &= iz_1 + \sum_{j=1}^s c_j z_1^{j+1} z_2^j \\ \dot{z}_2 &= -iz_2 + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j z_1^j z_2^{j+1} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} D(re^{i\theta}) &= ire^{i\theta} + \sum_{j=1}^s c_j r^{2j+1} e^{i\theta} \\ D(re^{-i\theta}) &= -ire^{-i\theta} + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j r^{2j+1} e^{-i\theta} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{r}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\dot{\theta} &= ire^{i\theta} + \sum_{j=1}^s c_j r^{2j+1} e^{i\theta} \\ \dot{r}e^{-i\theta} - ire^{-i\theta}\dot{\theta} &= -ire^{-i\theta} + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j r^{2j+1} e^{-i\theta} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{r} + ir\dot{\theta} &= ir + \sum_{j=1}^s c_j r^{2j+1} \\ \dot{r} - ir\dot{\theta} &= -ir + \sum_{j=1}^s \bar{c}_j r^{2j+1} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 2\dot{r} &= \sum_{j=1}^s 2\Re(c_j) r^{2j+1} \\ 2ir\dot{\theta} &= 2ir + \sum_{j=1}^s 2i\Im(c_j) r^{2j+1} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{r} &= \sum_{j=1}^s \Re(c_j) r^{2j+1} \\ \dot{\theta} &= 1 + \sum_{j=1}^s \Im(c_j) r^{2j} \end{cases} \end{aligned}$$

7. Análogamente puede hacerse con el campo en \mathbb{R}^2 a partir de los resultados del capítulo anterior. Podemos también expresar la ecuación diferencial de forma simplificada en \mathbb{C}^2 usando $|z|^2 = r^2$ y $z \in \mathbb{C}^2$.

1.2 Teorema de Poincaré

Definición 1.33 (Dominio de Poincaré). $0 \in \text{conv}(\sigma(A)) \Rightarrow \sigma(A)$ en el dominio de Siegel.

Caso contrario, se está en el dominio de Poincaré.

Lema 1.34 (Finitos monomios A -resonantes). *Si el espectro del operador lineal está en el dominio de Poincaré, entonces existen a lo sumo una cantidad finita de monomios con A -resonancia*

Demostración. Por definición del dominio de Poincaré:

$$0 \notin \text{conv}(\sigma(A)) \Rightarrow d(0, \text{conv}(\sigma(A))) > 0$$

Ahora bien, sabemos que: $|\alpha| \geq 2 \Rightarrow \frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{|\alpha|} = \langle \frac{\alpha}{|\alpha|}, \lambda \rangle \in \text{conv}(\sigma(A))$, pues $\frac{\alpha}{|\alpha|} \in \partial B_1(0)$. Finalizamos verificando que:

$$\begin{aligned} |\alpha| \geq \frac{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}}{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))} &\Rightarrow \frac{|\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_j|}{|\alpha|} \geq \left| \frac{|\langle \alpha, \lambda \rangle|}{|\alpha|} - \frac{|\lambda_j|}{|\alpha|} \right| \\ &\geq \frac{|\langle \alpha, \lambda \rangle|}{|\alpha|} - \frac{|\lambda_j|}{|\alpha|} \\ &\geq \frac{|\langle \alpha, \lambda \rangle|}{|\alpha|} - \frac{|\lambda_j|}{\frac{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}}{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}} \\ &\geq \frac{|\langle \alpha, \lambda \rangle|}{|\alpha|} - \frac{|\lambda_j| d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}} \\ &\geq \left| \langle \frac{\alpha}{|\alpha|}, \lambda \rangle \right| - \frac{|\lambda_j| d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}} \\ &\geq \left| \langle \frac{\alpha}{|\alpha|}, \lambda \rangle - 0 \right| - \frac{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2} \frac{|\lambda_j|}{\max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}} \\ &\geq d(\langle \frac{\alpha}{|\alpha|}, \lambda \rangle, 0) - \frac{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2} \\ &\geq d(0, \text{conv}(\sigma(A))) - \frac{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2} \\ &\geq \frac{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2} \end{aligned}$$

□

Corolario 1.35 (Cota inferior de A -resonancia). *Si $\sigma(A)$ en el dominio de Poincaré, se verifica:*

$$\forall (j, \alpha) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}_{\geq 2}, \langle \lambda, \alpha \rangle \neq \lambda_j \Rightarrow \exists C_0 : (\forall (j, \alpha) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}_{\geq 2}, |\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_j| \geq C_0 |\alpha|)$$

Demostración. Basta elegir el mínimo entre los valores de la demostración anterior y para valores de $|\alpha| < \frac{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}}{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}$ basta tomar la recíproca y multiplicar, obteniendo:

$$\frac{1}{|\alpha|} |\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_j| > \frac{d(0, \text{conv}(\sigma(A)))}{2 \max_{1 \leq j \leq n} \{|\lambda_j|\}} |\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_j|$$

Como esta cantidad de casos es finita, renombramos el valor izquierdo y tomamos el mínimo de todos los valores en la diferencia de condición de A -resonancia, luego se obtiene el resultado. \square

Definición 1.36 (Espacios útiles). 1. Definimos la norma $|\cdot|_M$ norma de máximo sobre \mathbb{C}^n :

$$\begin{aligned} |\cdot|_M : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto \max_{1 \leq j \leq n} \{|z_j|\} \end{aligned}$$

Definimos al espacio de Banach $\mathbb{C}_M^n := (\mathbb{C}^n, |\cdot|_M)$

2. Dado X espacio de Banach. Definimos, utilizando la última identificación del corolario 1.29, la norma $|\cdot|_k$ norma de la suma (de coeficientes) sobre $\text{Symm}^k(\mathbb{C}^n; X)$:

$$\begin{aligned} |\cdot|_k : \text{Symm}^k(\mathbb{C}^n; X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ M(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1, \dots, i_r} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} \in \mathbb{K}[v_i^j] &\mapsto \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} |T_{i_1, \dots, i_r}|_M \end{aligned}$$

Definimos al espacio de Banach $\text{Symm}_k^k(\mathbb{C}^n; X) := (\text{Symm}^k(\mathbb{C}^n; X), |\cdot|_k)$

3. Dado X espacio de Banach. Definimos, según la representación dada por la teoría de funciones de varias variables complejas, la familia de funciones $\{|\cdot|_{0,r}\}_{r>0}$, "normas" de formas componentes sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n; X)$:

$$\begin{aligned} |\cdot|_{0,r} : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n; X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x^k) &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k \end{aligned}$$

Definamos a los conjuntos:

$$\begin{aligned} C^\omega(\mathbb{C}^n; X) &= \{(f : B_r(0) \rightarrow X) \mathcal{O}(\mathbb{C}^n; X)\} \\ A_{0,r}(\mathbb{C}^n; X) &= \{f \in C^\omega(\mathbb{C}^n; X) : |f|_{0,r} < \infty\} \\ A_{1,r}(\mathbb{C}^n; X) &= \{f \in A_{0,r}(\mathbb{C}^n; X) : Df \in A_{0,r}(\mathbb{C}^n; X)\} \end{aligned}$$

Asimismo, definimos la "norma C^1 " $|\cdot|_{1,r}$ sobre $A_{1,r}(\mathbb{C}^n; X)$:

$$\begin{aligned} |\cdot|_{1,r} : A_{0,r}(\mathbb{C}^n; X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto |f|_{1,r} = |f|_{0,r} + |Df|_{0,r} \end{aligned}$$

Definimos a los espacios de Banach $A_{0,r}(X) := (A_{0,r}(\mathbb{C}^n; X), |\cdot|_{0,r})$, $A_{1,r}(X) := (A_{1,r}(\mathbb{C}^n; X), |\cdot|_{1,r})$

Proposición 1.37. *Las siguientes propiedades son inmediatas:*

1. $|M(x_1, \dots, x_k)|_M \leq |M|_k \prod_{j=1}^k |x_j|_M$
- 2.

Lema 1.38 (Derivada analítica). *Sea $f \in A_{0,r}(X)$ y $0 < \delta < r$. Entonces:*

1.

$$D^k f \in A_{0,r}(\text{Symm}_k^k(\mathbb{C}^n; X))$$

2.

$$D^k f(x) = k! \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} f_j(x^{j-k}, \cdot)$$

3.

$$|D^k f|_{0,\delta} \leq k! \frac{|f|_{0,r}}{(r-\delta)^k}$$

donde $f_k(x^0, \cdot) = f_k(\cdot)$

Demostración.

$$\begin{aligned} |f|_{0,r} &= \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k (\delta + (r-\delta))^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \delta^{k-i} (r-\delta)^i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k |f_k|_k \binom{k}{i} \delta^{k-i} (r-\delta)^i \end{aligned}$$

Como $f \in A_{0,r}(X) \Rightarrow |f|_{0,r} < \infty \Rightarrow$ serie abs. convergente. De donde cualquier arreglo converge al mismo valor y por tanto:

$$|f|_{0,r} = \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2; i < k} |f_k|_k \binom{k}{i} \delta^{k-i} (r-\delta)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} |f_k|_k \binom{k}{i} \delta^{k-i} (r-\delta)^i$$

Definamos a la función $g : B_{r-\delta}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mayorizada por la norma:

$$g(z^i) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} |f_k|_k \binom{k}{i} \delta^{k-i} z^i$$

Entonces $g \in \mathcal{O}(B_{r-\delta}(0))$ y por la desigualdad de Cauchy, el máximo se alcanza en la frontera, es decir:

$$\sum_{k=i}^{\infty} |f_k|_k \binom{k}{i} \delta^{k-i} \leq \frac{\max_{z \in \partial B_{r-\delta}(0)} \{|g(z)|\}}{(r-\delta)} \leq \frac{|f|_{0,r}}{(r-\delta)^i}$$

Sean $|x| < \delta, |y| < r - \delta \Rightarrow |x + y| < r$. De donde:

$$\begin{aligned}
 f(x + y) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k((x + y)^k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_k(x^{k-i}, y^i) \right) \\
 \Rightarrow |f(x + y)|_M &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |f_k(x^{k-i}, y^i)|_M \right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |f_k|_k |x|_M^{k-i} |y|_M^i \right) \\
 &\leq |f|_{0,r} < \infty
 \end{aligned}$$

Luego es serie abs. convergente, por tanto podemos efectuar el rearreglo:

$$\begin{aligned}
 f(x + y) &= \sum_{(i,k) \in \mathbb{N}^2, i < k} \binom{k}{i} f_k(x^{k-i}, y^i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} f_k(x^{k-i}, y^i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} f_k(x^{k-i}, \cdot) \right) (y^i) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x) y^i
 \end{aligned}$$

La cual es una expresión en la forma de la serie de Taylor.

Por la unicidad de la serie de Taylor, podemos igualar las expresiones:

$$\frac{1}{i!} D^i f(x) = \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} f_k(x^{k-i}, \cdot)$$

Con esto queda probado (2).

Evaluando en la norma:

$$\begin{aligned}
 |D^i f(x)|_{0,\delta} &= i! \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} |f_k(x^{k-i}, \cdot)|_{k-i} \delta^{k-i} \\
 &\leq i! \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} |f_k|_k \delta^{k-i} \\
 &\leq i! \frac{|f|_{0,r}}{(r - \delta)^i}
 \end{aligned}$$

De donde se prueba la acotación

□

Comentario 1.39. Probar la penúltima desigualdad anterior

Lema 1.40 ($|f \circ g|_{0,\delta} \leq |f|_{0,r}$).

$$f \in A_{0,r}(X), g \in B_r(0) \subseteq A_{0,\delta}(X) \Rightarrow (|f \circ g|_{0,\delta} \leq |f|_{0,r})$$

Inmediatamente se deduce de lo anterior que $f \circ g \in A_{0,\delta}(X)$

Demostración. Por teoría de funciones analíticas:

$$\begin{aligned} g \in B_\delta(r) \subseteq A_{0,r}(X) &\Rightarrow (|x| \leq \delta \Rightarrow |g(x)|_M \leq |g|_{0,\delta} < r) \\ &\Rightarrow f \circ g \in C^\omega(B_\delta(0), X) \end{aligned}$$

Ahora bien, desarrollando la norma:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\left[\sum_{l=0}^{\infty} g_l(x^l) \right]^k \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l|=i} f_k(g_{l_1}(x^{l_1}), \dots, g_{l_k}(x^{l_k})) \\ \Rightarrow |f \circ g|_{0,\delta} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l|=i} |f_k(g_{l_1}(\cdot), \dots, g_{l_k}(\cdot))|_i \delta^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|l|=i} |f_k|_k |g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_k}|_{l_k} \delta^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k \left[\sum_{|l|=i} |g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_k}|_{l_k} \right] \right) \delta^i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{|l|=i} |g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_k}|_{l_k} \right] \right) \delta^i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k \left[\sum_{l=0}^{\infty} |g_l| \delta^l \right]^k < \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|_k r^k = |f|_{0,r} \end{aligned}$$

□

Lema 1.41 (Composición es continua). *Considerando la función composición restringida:*

$$E : A_{0,r}(X) \times B_r(0) \subseteq A_{0,r}(X) \times A_{0,\delta}(X) \rightarrow A_{0,\delta}(X)(f, g) \quad \mapsto f \circ g$$

Tenemos que dicha función es continua

Demostración. Probaremos que la función es continua en cada argumento:

1. (1er argumento) Dados $f, h \in A_{0,r}(X), g \in B_r(0) \subseteq A_{1,\delta}(X)$, tenemos:

$$|E(f+h, g) - E(f, g)|_{0,\delta} = |f \circ g + h \circ g - f \circ g|_{0,\delta} = |h \circ g|_{0,\delta} \leq |h|_{0,r} = |f+h-h|_{0,r}$$

(Es decir, E es continua con respecto a una perturbación de su primer argumento en tanto que este tienda al 0).

Luego E es uniformemente continuo (la cota sólo depende de la perturbación o diferencia entre ambas funciones, mas no de las funciones particulares).

2. (2do argumento)

Sea $\beta := \frac{r-|g|_{1,\delta}}{3}$ y $h \in B_\beta(0) \subseteq A_{1,\delta}(X)$.

Entonces:

$$E(f, g+h)(x) = f(g(x) + h(x)) \in C^\omega(B_\delta, X)$$

Por el teorema de Taylor:

$$\forall |x| \leq |g|_{1,\delta}, |y| < r - |g|_{1,\delta}; f(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x) y^k$$

De donde se sigue:

$$\begin{aligned}
E(f, g + h)(x) - E(f, g)(x) &= f(g(x)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(g(x))(h(x))^k - f \circ g(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(g(x))(h(x))^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} f_j((g(x))^{j-k}, (h(x))^k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} f_k((g(x))^{k-j}, (h(x))^j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(f_k((g(x))^{k-j}, (h(x))^j) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|l|+|m|=i} f_k(g_{l_1}(x^{l_1}), \dots, g_{l_{k-i}}(x^{l_{k-i}}), h_{m_1}(x^{m_1}), \dots, h_{m_{k-i}}(x^{m_{k-i}})) \right) \\
\Rightarrow |E(f, g + h)(x) - E(f, g)(x)|_{0, \delta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|l|+|m|=i} |f_k(g_{l_1}(\cdot), \dots, g_{l_{k-i}}(\cdot), h_{m_1}(\cdot), \dots, h_{m_{k-i}}(\cdot))| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|l|+|m|=i} |f_k|_k |g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_{k-i}}|_{l_{k-i}} |h_{m_1}|_{m_1} \dots |h_{m_{k-i}}|_{m_{k-i}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{|l|+|m|=i} |g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_{k-i}}|_{l_{k-i}} |h_{m_1}|_{m_1} \dots |h_{m_{k-i}}|_{m_{k-i}} \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|l|+|m|=i} \left(|g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_{k-i}}|_{l_{k-i}} |h_{m_1}|_{m_1} \dots |h_{m_{k-i}}|_{m_{k-i}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|l|+|m|=i} \left(|g_{l_1}|_{l_1} \dots |g_{l_{k-i}}|_{l_{k-i}} |h_{m_1}|_{m_1} \dots |h_{m_{k-i}}|_{m_{k-i}} \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |g_l|_l \delta^l \right)^{k-j} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |h_m|_m \delta^m \right)^j \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (|g|_{0, \delta})^{k-j} (|h|_{0, \delta})^j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k |h|_{0, \delta} k \sum_{j=1}^k \binom{k-1}{j} (|g|_{0, \delta})^{k-j} (|h|_{0, \delta})^{j-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k k |h|_{0, \delta} (|g|_{0, \delta} + |h|_{0, \delta})^{k-1}
\end{aligned}$$

Terminamos el argumento:

$$\begin{aligned}
|E(f, g + h)(x) - E(f, g)(x)|_{0,\delta} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k k (r - \beta)^{k-1} \right) |h|_{0,\delta} \\
&\leq |f|_{0,r} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{r^k} (r - \beta)^{k-1} \right) |h|_{0,\delta} \\
&\leq |f|_{0,r} \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{r^{k-1}} (r - \beta)^{k-1} \right) |h|_{0,\delta} \\
&\leq |f|_{0,r} \frac{1}{r} |h|_{0,\delta} \frac{1}{\left(1 - \frac{r-\beta}{r}\right)^2} \\
&= |f|_{0,r} \frac{1}{r} |h|_{0,\delta} \frac{r^2}{\beta^2} \\
&= |f|_{0,r} |h|_{0,\delta} \frac{r}{\beta^2}
\end{aligned}$$

De donde se sigue la continuidad en el segundo argumento

□

Lema 1.42 ($E \in C^\infty$). *La composición es de clase C^∞*

Demostración. Sean $f \in A_{0,r}(X)$, $g \in B_r(0) \subseteq A_{1,\delta}(X)$ con $|g|_{1,\delta} < r$, $\beta = \frac{r-|g|_{1,\delta}}{3}$.

Expresando E en polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned}
\forall |x| \leq |g|_{1,\delta}, |y| \leq r - |g|_{1,\delta}; f(x + y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(x) y^k \\
\Rightarrow E(f, g + h)(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D^k f(g(x)) (h(x))^k + R_{N+1}(x)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_{N+1}(x) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f(g(x)) (h(x))^k \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} f_j((g(x))^{j-k}, (h(x))^k) \\
\Rightarrow |R_{N+1}(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} f_j((g(x))^{j-k}, (h(x))^k) \\
&\leq \frac{1}{\beta^{N+1}} |f|_{0,r} |h|_{1,\delta}^{N+1}
\end{aligned}$$

Con lo último dado como caso general del argumento anterior. Basta extraer $|h|$ de la expansión binomial y β se completa de la extracción anterior.

Por el recíproco del Teorema de Taylor, existe la derivada de orden arbitrario en el segundo argumento de la función $E(f, \cdot)$ (pues existe el polinomio que converge y cada término le corresponde la derivada).

Es decir: $D_g^k E(f, g) = (D^k f) \circ g$ por comparación entre series.

Como la derivada es cada término, será continua por ser composición de funciones en los conjuntos respectivos.

De donde es continua, lineal en su primer argumento por la linealidad de D^k y que $\circ g$ se reparte al estar a derecha

Se deduce que la derivada en el primer argumento es la derivada de una función lineal, luego es la propia función lineal:

$$D_g^k E(f + \lambda h, g) = D^k(f + \lambda h) \circ g = (D^k f + D^k \lambda h) \circ g = D^k f \circ g + \lambda D^k h \circ g$$

De donde renombrando $D_g^k E(f, g) = Af$:

$$D_f(D_g^k E(f, g))(h) = D_f(Af)(h) = A(h) = D_g^k E(h, g)$$

Luego como se ha probado para $N = 0$ en el caso anterior, se puede probar cada caso a partir del anterior. □

Lema 1.43 ($Dg(x)Mx$ es acotada). Sea $g \in A_{1,r}(X)$, $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Entonces:

1. $Dg(x)Mx \in A_{0,r}(X)$
2. $|f|_{0,r} \leq r|M| \cdot |Dg|_{0,r}$

Demostración.

$$\begin{aligned} Dg(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x^{k-1}, \cdot) \\ \Rightarrow |Dg(x)|_{0,r} &= \sum_{k=1}^{\infty} k |g_k|_k r^{k-1} \end{aligned}$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x^{k-1}, Mx) \\ \Rightarrow f_k(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i=1}^k g_k(v_1, \dots, v_{i-1}, Mv_i, v_{i+1}, \dots, Mv_k) \\ \Rightarrow |f_k|_k &= \sum_{i=1}^k |g_k|_k |M| = k |g_k|_k |M| \\ \Rightarrow |f|_{0,r} &= \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|_k r^k \leq |M| \sum_{i=1}^{\infty} k |g_k|_k r^k = r|M| \cdot |Dg|_{0,r} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.44 (Poincaré). Sea $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Si $\sigma(A)$ en el dominio de Poincaré, y ningún monomio condiciones de resonancia para A (i.e. $\forall(j, \alpha) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}_{\geq 2}, \langle \lambda, \alpha \rangle \neq \lambda_j$)

Entonces:

$$\exists(\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n) : (x = y + \xi(y) \in \mathcal{O}(\Omega)) \wedge (\xi(y) \in \mathcal{O}(|y|^2)) \wedge (\dot{x} = Ax + \mathcal{O}(|x|^2)) \mapsto \dot{y} = Ay$$

Demostración. 1. Definamos $V_{i,r} = \{g \in A_{i,r}(\mathbb{C}^n) : g(0) = 0, Dg(0) = 0\} \subseteq A_{i,r}$.

Ambos son cerrados por ser analíticos y poder aproximarse secuencialmente, tomando los primeros términos de la serie como 0 (por expansión de Taylor). Luego son subespacios cerrados en $A_{i,r}$ Banach.

2. Definamos al operador solución:

$$F : V_{0,r} \times \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq A_{0,r} \times V_{1,r} \rightarrow V_{0,\frac{r}{2}}$$

$$F(f, \xi)(y) = D\xi(y)Ay - A\xi(y) - f(y + \xi(y))$$

Es inmediato que $F(0, 0)(y) = D0(y)A0 - A0(y) - 0(y + 0(y)) = 0 - 0 - 0(y) = 0$.

Podemos reescribir F como $F(f, \xi)(y) = L_A(\xi)(y) - f(y + \xi(y)) = L_A(\xi)(y) - f \circ (\text{Id} + \xi)(y) \Rightarrow F(f, \xi) = L_A(\xi) - f \circ (\text{Id} + \xi)$.

Es decir: $F(f, \xi) = L_A(\xi) - E(f, \text{Id} + \xi)$

Luego por ser suma de funciones C^1 (La adjunta es C^1 , la composición es C^1 por Lema anterior).

3. Tomando $K = F_\xi(0, 0)$. Entonces es la función adjunta de A :

$$F(f, \xi) = L_A(\xi) - E(f, \text{Id} + \xi)$$

$$\Rightarrow D_\xi F(0, 0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_A(th) - L_A(0)}{t} + Df \circ (\text{Id} + \xi)(0, 0)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tL_A(h)}{t} + Df \circ (\text{Id} + \xi)(0, 0)$$

$$\Rightarrow D_\xi F(0, 0)(h) = L_A(h) + D0 \circ (\text{Id}) = L_A(h)$$

De donde:

$$K : V_{1,\frac{r}{2}} \rightarrow V_{1,\frac{r}{2}}$$

$$(Kv)(y) = L_A(v)(y)$$

4. Admitiendo la escritura sobre las bases de H_n^k , podemos escribir:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha^j x^\alpha \right) e_j \in V_{0,\frac{r}{2}}$$

Luego definimos la inversa local:

$$(\hat{K}g)(x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{c_{\alpha}^j}{\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_j} x^{\alpha} \right) e_j$$

5. Como $\sigma(A)$ en el dominio de Poincaré, y no existen monomios resonantes, se cumple corolario sobre cota inferior:

$$|\langle \alpha, \lambda \rangle - \lambda_j| \geq C_0 |\alpha|$$

Luego tomamos:

$$C_{\alpha} = (c_{\alpha}^1, \dots, c_{\alpha}^n)^t$$

$$\hat{C}_{\alpha} = \left(\frac{c_{\alpha}^1}{\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_1}, \dots, \frac{c_{\alpha}^n}{\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_n} \right)^t = \langle C_{\alpha}, \left(\frac{1}{\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_n} \right) \rangle$$

6. Denotamos por $v(x) := (\hat{K}g)(x)$ para $g \in V_{0, \frac{r}{2}}$. Por item anterior:

$$v_k(x^k) = \sum_{|\alpha|=k} \hat{C}_{\alpha} x^{\alpha}$$

$$\Rightarrow |v_k|_k = \sum_{|\alpha|=k} |\hat{C}_{\alpha}| \leq \sum_{|\alpha|=k} |C_{\alpha}| \frac{1}{C_0 |\alpha|}$$

$$= \frac{1}{C_0 k} \sum_{|\alpha|=k} |C_{\alpha}|$$

$$= \frac{1}{C_0 k} |g_k|_K$$

Por tanto, podemos calcular los valores de la norma de v :

$$|v|_{0, \frac{r}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} |v_k|_k \left(\frac{r}{2}\right)^k$$

$$\leq \frac{1}{C_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} |g_k|_k \left(\frac{r}{2}\right)^k$$

$$\leq \frac{1}{C_0} |g|_{0, \frac{r}{2}} < \infty$$

$$|Dv|_{0, \frac{r}{2}} = \sum_{k=2}^{\infty} k |v_k|_k \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1}$$

$$\leq \frac{2}{C_0 r} \sum_{k=2}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{C_0 r} |g|_{0, \frac{r}{2}} < \infty$$

Entonces $v = \hat{K}g \in V_{1, \frac{r}{2}}$.

Como $\hat{K} : V_{0, \frac{r}{2}} \rightarrow V_{1, \frac{r}{2}}$, obtenemos $|\hat{K}g|_{1, r} = |v|_{1, r} = |v|_{0, r} + |Dv|_{0, r} \leq \frac{|g|_{0, \frac{r}{2}}}{C_0} \frac{r+2}{r}$ entonces es acotado, lineal por ser la adjunta. Luego:

$$\begin{aligned}
Kv(x) &= L_A\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x^k)\right) \\
&= L_A\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{c}_{\alpha}^j x^{\alpha}\right) e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{c}_{\alpha}^j L_A(x^{\alpha} e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{c}_{\alpha}^j (\langle \lambda, \alpha \rangle - \lambda_j) x^{\alpha} e_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^j x^{\alpha} e_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^j x^{\alpha}\right) e_j = g(x) \\
&\Rightarrow \hat{K} = K^{-1}
\end{aligned}$$

Por tanto, el operador $F_{\xi}(0, 0)$ tiene inversa acotada.

7. Por el T. F. Im.:

$$\exists \epsilon > 0 : (\forall f \in V_{0, r} (|f|_{0, r} \leq \epsilon), \exists \xi = \xi(f) \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq A_{1, r}(\mathbb{C}^n) : F(f, \xi) = 0, \xi(0) = 0)$$

Para un $f \in V_{0, r}$ dado, consideramos $\hat{f}(x) = \gamma^{-1}f(\gamma x)$ donde $0 < \gamma < 1$.

$\hat{f} \in V_{0, r}$ por tener representación en serie de Taylor que extrae e inserta el mismo valor dentro de los monomios:

$$|\hat{f}|_{0, r} = \gamma^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2}^{\infty} |c_{\alpha}^j| \gamma^k r^k\right) e_j = \sum |c_{\alpha}^j| \gamma^{k-1} r^k \leq |f|_{0, r} < r$$

Como $f(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$ cuando $x \rightarrow 0$:

$$\exists \gamma > 0 : |\hat{f}|_{0, r} < \epsilon$$

Por lo anterior:

$$\exists \hat{\xi} \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq A_{1, \frac{r}{2}}(\mathbb{C}^n) : F(\hat{f}, \hat{\xi}) = 0$$

Sea $\xi(x) = \gamma \hat{\xi}(\gamma^{-1}x)$, $|x| \leq \frac{r}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \xi(x) \in V_{1, \frac{\gamma r}{2}} \\
&\Rightarrow F(f, \xi)(x) = D\xi(x)Ax - A\xi(x) - f(x + \xi(x)) \\
&\quad = \gamma F(\hat{f}, \hat{\xi})(\gamma^{-1}x) = 0, \forall |x| \leq \frac{\gamma r}{2}
\end{aligned}$$

8. Basta tomar ξ dado anteriormente como solución del operador solución, por lo anterior (proposición 7.11), la parte no lineal se anula:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + f(x) = Ax + L_A \xi(y) \\
&\Rightarrow (\text{Id} + D\xi(y))\dot{y} = Ay + A\xi(y) + L_A \xi(y) \\
&\Rightarrow (\text{Id} + D\xi(y))\dot{y} = Ay + A\xi(y) + D\xi(y)Ay - A\xi(y) \\
&\quad \Rightarrow (\text{Id} + D\xi(y))\dot{y} = Ay + D\xi(y)Ay \\
&\quad \Rightarrow (\text{Id} + D\xi(y))\dot{y} = (\text{Id} + D\xi(y))Ay \\
&\quad \Rightarrow (\text{Id} + D\xi(y))(\dot{y} - Ay) = 0
\end{aligned}$$

Como hemos asumido los cambios de coordenadas difeomorfismos, entonces es inversible (Pudimos escoger γ del argumento anterior suficientemente pequeño como para que la norma de γ sea suficientemente pequeño para $\|D\xi(y)\| < 1$), luego el cambio de coordenadas resulta en $\dot{y} = Ay$

□

Corolario 1.45 (Poincaré No diagonalizable). *El Teorema de Poincaré es válido para matrices no diagonalizables.*

Demostración. El argumento anterior fue una aplicación del Teorema de la función implícita. Para ello, sólo requerimos que la derivada en el 2do argumento sea acotada con inversa acotada. Es decir, que $K := D\xi F(0, 0)$ sea acotada con inversa acotada, inclusive aunque el operador no sea diagonalizable.

Asumiendo A en forma canónica de Jordan $A = S + \epsilon N$, podemos hacer la descomposición, operando:

$$\begin{aligned}
K &= K_S + K_{\epsilon N}(K_S v)(y) = Dv(y)Sy - Sv(y) \\
(K_{\epsilon N}v)(y) &= Dv(y)\epsilon Ny - \epsilon Nv(y) = \epsilon(K_N v)(y)
\end{aligned}$$

para $v \in V_{1,r}$.

Por Teorema de Poincaré, K_S acotado con inversa acotada en $V_{0,r}$.

Luego basta escoger ϵ suficientemente pequeño para $\|K_{\epsilon N}\| = \epsilon \|K_N\| < \frac{1}{\|K_S^{-1}\|}$. Luego el operador K tiene inversa acotada. □

Corolario 1.46 (A-Forma Normal de Poincaré). *Si $\sigma(A)$ en el dominio de Poincaré, entonces existe un cambio de coordenadas analítica $x = y + \xi(y)$, donde $\xi(y) = \mathcal{O}(|y|^2)$ cuando $y \rightarrow 0$, verificando que:*

$$\dot{x} = Ax + f(x) \mapsto \dot{y} = Ay + h(y)$$

donde $h(y)$ polinomio cuyos monomios son A -resonantes, conmutando con e^S , donde S parte semisimple de A

Demostración. Se transforma la ecuación diferencial a la A -forma normal usual, con los primeros términos de la parte no lineal (de orden hasta la suavidad del campo) monomios resonantes, luego el cambio de coordenadas resultante al ser composición de cambios de coordenadas iterados, resulta en un cambio de coordenadas analíticos (por ser cada uno analítico).

Luego la ecuación diferencial resulta en:

$$\dot{x} = Ax + h(x) + f(x)$$

Definimos los subespacios lineales, cerrados:

$$V_{i,r}^m := \{g \in A_{i,r}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n) : g(x) = \mathcal{O}(|x|^{m+1}) \wedge |g|_{i,r} < \infty\} \leq A_{i,r}$$

Definamos la bola cerrada:

$$\overline{B}_{1,\delta}^m(r) := \{g \in V_{1,\delta}^m : |g|_{1,\delta} \leq r\}$$

Definimos el operador solución:

$$\begin{aligned} F : V_{0,r}^m \times V_{0,r}^m \times \overline{B}_{1,\frac{r}{2}}^m(r) &\rightarrow V_{0,\frac{r}{2}}^m \\ (f, h, \xi) &\mapsto F(f, h, \xi)(y) = F(f + h, \xi) + (\text{Id} + D\xi(y))h(y) \end{aligned}$$

Entonces $F(0, 0, 0) = 0$. Definamos $K = D_\xi F(0, 0, 0) = L_A(y)$. Como no hay monomios resonantes de orden mayor a m , entonces hay solución del operador solución por argumento de cota anterior, esto es, la cota está garantizada sobre el espacio $V_{i,r}^m$. \square

1.3 Simetría

Definición 1.47 (Simetría). Una ecuación diferencial tiene S -simetría si el campo que lo determina verifica $X(Sx) = SX(x)$, donde S es un campo vectorial.

Una ecuación diferencial tiene Γ -Simetría si el campo que lo define cumple $X(Sx) = SX(x) \forall S \in \Gamma$.

En este caso, Γ es un grupo de matrices (el conjunto de todas las matrices que pueden dotar de simetría al campo es un grupo, con lo que basta tomar un subgrupo).

Comentario 1.48. Por un simple cálculo $\dot{S}x = X(Sx) \Rightarrow S\dot{x} = SX(x) \Rightarrow \dot{x} = X(x)$.

Es decir, el campo queda invariante tras aplicar el cambio de coordenadas correspondiente a su simetría (siendo S transformación lineal).

Un ejemplo inmediato sería una matriz rotación con respecto al campo lineal determinado por la matriz rotación

Definición 1.49 (Rotación). Definimos al grupo de simetría $\mathbb{Z}_q = \langle R(\frac{2\pi}{q}) \rangle$ para todo $q \in \mathbb{N}$

Esto es, grupo de rotaciones en una enésima parte de la rotación del círculo.

Proposición 1.50 (\mathbb{Z}_q). *El grupo de simetrías de rotaciones en una enésima parte de la rotación del círculo completo es isomorfa al grupo \mathbb{Z}_q*

Demostración. Basta mapear al elemento de rotación básica con la unidad, luego se obtiene el isomorfismo □

Definición 1.51 (Giro). Se define al grupo de simetría $K_n = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Esto es, grupo de giros o inflexiones con respecto del último eje.

Definición 1.52 (Grupo Dihedro). Definimos al grupo de simetría $D_q = \langle R(\frac{2\pi}{q}), D_2 \rangle$ para todo $q \in \mathbb{N}$

Esto es, grupo de composición de rotaciones en una enésima parte de la rotación del círculo y giros con respecto del último eje.

Lema 1.53. *Las ecuaciones diferenciales con S -simetría tienen parte lineal con S -simetría y cada monomio de su parte no lineal con S -simetría. Esto es:*

1. $SA = AS$
2. $h^k(Sx) = Sh^k(x)$ para todos $x \in \Omega$

Demostración. Basta tomar:

$$\dot{x} = X(x) = Ax + \sum_{j=1}^k h^j(x) + f(x)$$

Luego aplicando Sx tenemos:

$$\begin{aligned}
S\dot{x} &= \dot{S}x = ASx + \sum_{j=1}^k h^j(Sx) + f(Sx) \\
\Rightarrow SAx + \sum_{j=1}^k Sh^j(x) + Sf(x) &= ASx + \sum_{j=1}^k h^j(Sx) + f(Sx) \\
\Rightarrow (SA - AS)x + \sum_{j=1}^k (Sh^j(x) - h^j(Sx)) + (Sf(x) - f(Sx)) &= 0
\end{aligned}$$

Por unicidad de la expansión de Taylor, dada por la suavidad de l campo X , se cumple que : $SAx = ASx, h^j(Sx) = Sh^j(x)$ para todo x en el dominio.

La igualdad de la parte lineal se debe a la escritura de las transformaciones lineales en términos de la base, luego basta tomar un vector ϵe_j cercano al origen, de forma que obtengamos la escritura de la transformación lineal idéntica, por tanto $SA = AS$ \square

Lema 1.54 ($X(Sx) = SX(x) \xrightarrow{\phi} Y(Sy) = SY(y)$). *La S -simetría de una ecuación diferencial es invariante bajo cambios de coordenadas S -simétricos*

Demostración. Recordemos que el campo tras el cambio de coordenadas es $Y(y) := (D\phi(y))^{-1}X(\phi(y))$. Además, derivando, se tiene: $\phi(Sy) = S\phi(y) \Rightarrow D\phi(Sy)S = SD\phi(y)$ para cambio de coordenadas es S -simétrico, entonces:

$$\begin{aligned}
Y(Sy) &= (D\phi(Sy))^{-1}X(\phi(Sy)) \\
&= (SD\phi(y)S^{-1})^{-1}X(S\phi(y)) \\
&= S(D\phi(y))^{-1}S^{-1}SX(\phi(y)) \\
&= S(D\phi(y))^{-1}X(\phi(y)) \\
&= SY(y)
\end{aligned}$$

\square

Definición 1.55 (Polinomios homogéneos S -simétricos). Definamos el conjunto de polinomios homogéneos de grado k y n variables sobre \mathbb{C} con S -simetría como:

$$\overline{H}_n^{k,S} = \{f \in H_n^k : f(Sx) = Sf(x) \forall x \in \mathbb{C}^n\}$$

Por la linealidad de f con respecto del argumento y con respecto de S , entonces $\overline{H}_n^{k,S} \leq H_n^k$

Lema 1.56 ($L_A^k(\overline{H}_n^{k,S}) \subseteq \overline{H}_n^{k,S}$ para $AS = SA$). *Supongamos que las matrices A, S conmutan, es decir, que $AS = SA$, entonces el subespacio vectorial $\overline{H}_n^{k,S}$ es L_A^k -invariante*

Demostración.

$$\begin{aligned}
h \in \overline{H}_n^{k,S} &\Rightarrow L_A^k(h)(Sx) = Dh(Sx)ASx - Ah(Sx) \\
&= SDh(x)S^{-1}SAx - AS h(x) \\
&= SDh(x)Ax - SAh(x) \\
&= S(Dh(x)Ax - Ah(x)) \\
&= SL_A^k(h)(x) \\
&\Rightarrow L_A^k(h)(Sx) = SL_A^k(h)(x) \\
&\Rightarrow L_A^k(h) \in \overline{H}_n^{k,S}
\end{aligned}$$

□

Definición 1.57 (Operador y espacios Restricción). Definimos al operador adjunto restricción como $\overline{L}_A^k = L_A^k|_{\overline{H}_n^{k,S}}$ y la imagen de dicho operador y complementario a la imagen con notación análoga. Por invarianza del operador en el subespacio garantiza que la matriz de representación sea un sub bloque de la matriz del operador adjunta original.

Teorema 1.58 (A -forma Normal con simetría). *Si una ecuación diferencial tiene S -simetría, entonces existe una secuencia de cambios de coordenadas perturbaciones de identidad con S -simetría que transforman la ecuación diferencial a la forma normal, con monomios en el espacio complementario restricción asociado al operador restricción.*

Demostración. En la demostración de la A -forma normal aprovechamos la S -simetría para obtener la S -simetría de la parte lineal y de los monomios no lineales, luego podemos obtener que dichos monomios están en $\overline{H}_n^{k,S}$, luego obtenemos del complementario restricción los monomios que nos interesen como imágenes de monomios en $\overline{H}_n^{k,S}$, luego el cambio de coordenadas tiene S -simetría y por tanto preserva la S -simetría original del campo. Prosiguiendo de forma inductiva como en el teorema original, se llega al resultado. □

Definición 1.59 (A -forma Normal con simetría). La forma normal del Teorema anterior se dice una A -forma normal con simetría

Lema 1.60 ($\overline{H}_n^{k,S} = \overline{L}_A^k(\overline{H}_n^{k,S}) \oplus \text{Ker}(L_{A^*}^k) \cap \overline{H}_n^{k,S}$). *Supongamos que $AS = SA, A^*S = SA^*$. Entonces un subespacio complementario a la imagen del operador restricción ($\overline{L}_A^k(\overline{H}_n^{k,S})$) es dado por $\text{Ker}(L_{A^*}^k) \cap \overline{H}_n^{k,S}$*

Demostración. Del Lema anterior, por condición de $AS = SA$ y $A^*S = SA^*$, entonces el subespacio es invariante por $\overline{L}_A^k, \overline{L}_{A^*}^k$, los cuales en representación matricial son adjuntos el uno del otro, luego basta tomar:

$$(\overline{L}_A^k)^* = (L_A^k|_{\overline{H}_n^{k,S}})^* = (L_A^k)^*|_{\overline{H}_n^{k,S}} = L_{A^*}^k|_{\overline{H}_n^{k,S}} = \overline{L}_{A^*}^k$$

□

Definición 1.61 (Operador Adjunta simétrico). Definimos el operador adjunto simétrico:

$$\begin{aligned} L^{k,S} : H_n^k &\rightarrow H_n^k \\ h(x) &\mapsto h(Sx) - Sh(x) \end{aligned}$$

Luego $\overline{H}_n^{k,S} = \text{Ker}(L^{k,S})$.

Comentario 1.62. Aplicamos la representación matricial para obtener $\text{Ker}(L^{k,S})$

Lema 1.63 ($\beta_{\overline{H}_n^{k,D}} = \{x^\alpha : D^\alpha \in D_{jj}\}$). Si S es matriz diagonal, entonces el conjunto de monomios S -simétricos de orden k :

$$\beta_{\overline{H}_n^{k,D}} = \{x^\alpha e_j : s^\alpha = s_j, |\alpha| = k, 1 \leq j \leq n\}$$

Es decir, el conjunto formado por aquellos monomios que verifican $x^\alpha e_j (Se_i) = \delta_{ij} s^\alpha = \delta_{ij} s_j = Se_i$.

Es una base de $\overline{H}_n^{k,S}$

Demostración. Por construcción del conjunto, todo monomio es anulado por el operador, al estar en el subespacio.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} c_{j\alpha} x^\alpha e_j \in \overline{H}_n^{k,S} \\ \Rightarrow 0 &= L^{k,S}(h)(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} c_{j\alpha} L^{k,S}(x^\alpha e_j)(x) \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} c_{j\alpha} (s^\alpha - s_j) x^\alpha e_j \end{aligned}$$

pues $s^\alpha x^\alpha = \Pi(s_j x_j)^\alpha$.

Luego si los monomios no están en $\beta_{\overline{H}_n^{k,D}} \Rightarrow$ no se anulan, luego $c_{j\alpha} = 0$ en los vectores no S -simétricos, por tanto, como la escritura sólo está en términos de elementos de $\beta_{\overline{H}_n^{k,D}}$ y éstos forman un conjunto l.i. por ser elementos de la base de H_n^k , se sigue que son generados l.i., y por tanto base de $\overline{H}_n^{k,D}$ \square

Teorema 1.64. Supongamos que la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) \\ f(x) &= \mathcal{O}(|x|^2), x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

es una A -forma normal con S -simetría, entonces la ecuación diferencial tras el cambio de coordenadas lineal $x = Py$ es una $P^{-1}AP$ -forma normal con $P^{-1}SP$ -simetría

Demostración. Recordemos que la ecuación diferencial se transforma en:

$$P\dot{y} = APy + f(Py) \Rightarrow \dot{y} = P^{-1}APy + P^{-1}f(Py)$$

La $P^{-1}SP$ -simetría se sigue de:

$$\begin{aligned} P^{-1}APP^{-1}SP &= P^{-1}ASP = P^{-1}SAP = P^{-1}SPP^{-1}AP \\ P^{-1}f(P(P^{-1}SPy)) &= P^{-1}f(SPy) = P^{-1}Sf(Py) = (P^{-1}SP)P^{-1}f(Py) \end{aligned}$$

luego la parte lineal y no lineal son S -simétricos, por tanto todo el nuevo campo. \square