Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026

Índice

Capítulo 1

Variedades Invariantes

Comentario 0.1. Recordemos los estudios del pregrado de campos vectoriales con puntos de equilibrio en el origen (es posible transformar todo campo con punto de equilibrio en uno sobre el origen mediante un cambio de coordenadas, en particular mediante una homotesia). Durante nuestro estudio sobre campos lineales obtuvimos la caracterización (con respecto de representantes de clase bajo conjugación topológica) del campo a partir de la reducción a los espacios generados por los autovectores con parte real negativa, positiva y nula, denominados como espacio estable, inestable y central. A los campos cuyos autovalores eran de parte real no nula les llamamos hiperbólicos y vimos que la dirección dada por dichos autovectores nos indicaba la dirección general del flujo (en muchos casos, resultando en figuras semejantes a las hipérbolas). Ahora bien, en la mayoría de cursos de pregrado se ha visto, al menos de forma aplicada, el Teorema de Grobman-Hartman, el cual afirma que los campos cuya parte lineal (que es la mejor aproximación lineal por ser derivada) sea hiperbólica son topológicamente conjugados a dicha parte lineal. Como la parte lineal de campos hiperbólicos está completamente caracterizada en su sentido cualitativo por la combinación del comportamiento del espacio estable/inestable (a esta suma le llamaremos espacio hiperbólico), también los campos hiperbólicos están completamente caracterizados. Sin embargo, los campos no hiperbólicos son problemáticos, pues su comportamiento se encuentra controlado por la parte no lineal. Veamos esto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.2. Tomemos el campo dado de la forma:

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(x,y)$$

Como la parte lineal queda determinada para $f(0,0) = 0, Df(0,0) = 0$, podemos modificar la parte no lineal sujeta a dichas condiciones y ver si dichos campos tienen el mismo diagrama de fase.

1. Caso $f(x,y) = 0$: Recordamos de los cursos de pregrado que el campo es un centro, el cual está formado de órbitas periódicas en forma de círculos de forma sucesiva que se acumulan en el origen, es decir, que su diagrama de fase es de la forma:

2. Caso $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$:

3. Caso $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$:

Del estudio de los 3 campos anteriores hemos confirmado lo ya expresado en el comentario.

Comentario 0.3. Como se vió en el ejemplo anterior, inclusive para un campo relativamente sencillo, el estudio de campos no hiperbólicos se complica y no basta con estudiar el espacio central. Sin embargo, cabe preguntarse si aún con esta dificultad podemos reducir el comportamiento de la parte hiperbólica del campo (incluyendo la parte no lineal) al estudio del espacio central. De ser así, tan sólo deberíamos estudiar los campos cuyas partes lineales estén conformadas exclusivamente por autovalores de parte real nula. De ser así, por mucha diversidad que puedan tener, el problema se reduce significativamente, tanto en dimensión como en clasificación. Esto ha sido ya dado y en lo sucesivo daremos una breve exposición de los Teoremas.

1 Variedad Central

Definición 1.1 (Espacio Hiperbólico)**.** Consideremos el campo vectorial $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^k. con una singularidad en 0 (punto de equilibrio).

Definimos el espacio hiperbólico y su proyección como:

$$E_h := E_s \oplus E_u$$
$$\pi_h := \pi_s + \pi_u$$

Definición 1.2 (Espacio de Funciones C^k acotadas)**.** Definimos el espacio de Banach:

$$C_b^k(X,Y) := \{w \in C^k(X,Y) : ||w||_k < \infty\}$$

Espacio de funciones acotadas bajo norma C^k para X, Y espacios de Banach. (La derivada y su norma están garantizadas por trabajo anterior sobre derivada sobre espacios de Banach)

Definición 1.3 (Espacio de funciones acotadas con D^k Lipschitz)**.** Definimos el espacio de Banach:

$$C_b^{k,1}(X,Y) := \{w \in C_b^k(X,Y) : \frac{||D^k w(x) - D^k w(y)||_{C^k}}{||x-y||_X} < \infty\}$$

el cual está formado por funciones con norma $||w||_{C^{k,1}} := ||w||_{C^k} + \frac{||D^k w(x) - D^k w(y)||_{C^k}}{||x-y||_X}$ acotada.

Lema 1.4 (Decaimiento y crecimiento exponencial de la proyección)**.** *La parte lineal del campo, al actuar sobre los vectores del espacio central/no central, crece/decae exponencialmente de acuerdo a cotas que se relacionan como sigue:*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists K \geq 1, \alpha > 0, \beta > 0 : k\alpha < \beta \wedge \begin{cases} |e^{DX(0)t}\pi_c| \leq Ke^{\alpha|t|}, \forall t \in \mathbb{R} \\ |e^{DX(0)t}\pi_s| \leq Ke^{-\beta t}, t \geq 0 \\ |e^{DX(0)t}\pi_u| \leq Ke^{\beta t}, t \leq 0 \end{cases}$$

Es decir, el crecimiento y decaímiento de la parte central está controlado por α, el decaimiento de la parte estable está controlado por β y el crecimiento ”en la dirección opuesta” de la parte inestable está controlado por β. Luego podemos tomar como representativos los cambios en curvas solución de la parte lineal como acotados según las funciones exponenciales.

Demostración. A partir de un β verificando:

$$\min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\} \cdot \frac{k}{k+1} < \beta < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\}$$

Se obtiene:

$$\epsilon := \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\} - \beta$$

Definimos α como el valor entre:

$$0 < \epsilon < \alpha < \frac{\beta}{k}$$

Es decir, a partir de:

$$\epsilon < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\} \cdot \frac{1}{k+1} < \alpha$$

Luego

$$\min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\} \cdot \frac{1}{k+1} < \alpha < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\} \cdot \frac{1}{k}$$

A partir de esto, se verifican las desigualdades:

1. Para el caso π_s, π_u

   En la demostración de 3.4.2 y 3.4.5 iv de Tópicos de E.D.O. sólo importa que el valor de β sea menor al mínimo valor absoluto de la parte real de los autovalores. Asimismo ya se garantiza $K_1 \geq 1$

2. Para el caso π_c

   Ahora bien, recordemos que la forma canónica de Jordan de una matriz con autovalores imaginarios puros es de la forma:

   $$J = J_{2n}(0; \lambda) + N_{2n}^2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

   y obedece la siguiente cota (Tópicos de E.D.O. Lema 3.4.2):

   $$||e^{tJ}|| \leq p(t)$$

   Donde p es un polinomio.

   Luego se verifica la cota usando:

   $$p(t) \leq K_2 e^{\alpha|t|}$$

   Para $\alpha > 0$ arbitrario, definamos la función:

   $$\frac{p(t)}{e^{\alpha|t|}}$$

   Ahora bien, sabemos que:

   $$\lim_{|t| \to \infty} \frac{p(t)}{e^{\alpha|t|}} = 0$$

   $$\Rightarrow \exists M > 0 : \frac{p(t)}{e^{\alpha|t|}} \text{ acotado en } \mathbb{R} - [-M, M]$$

   Además, $\frac{p(t)}{e^{\alpha|t|}}$ continua en $[-M, M]$ compacto, por tanto alcanza máximo, luego $\frac{p(t)}{e^{\alpha|t|}}$ acotado en todo $\mathbb{R}$.

Luego la función es acotada por algún K_2

Escogiendo $K := \max\{K_1, K_2\}$, se tienen ambas cotas $\square$

Comentario 1.5. El k no afecta a la demostración anterior y está remarcado para explicitar la propiedad que queremos que se verifique en demostraciones posteriores.

Definición 1.6 (Espacio de cambio controlado)**.** Definamos el espacio de Banach:

$$C_\gamma := \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : ||x||_\gamma := \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|x(t)| < \infty\}$$

Donde $\alpha < \gamma < \beta$ como en el Lema anterior. Es decir, α, β en función de k y γ dado, por tanto, a partir de ese k

Comentario 1.7. El anterior conjunto es aquel en la cual las curvas experimentan crecimiento exponencial, posiblemente mayor al crecimiento en el espacio central, y decaímiento exponencial, posiblemente mayor al del espacio no central.

Definición 1.8 (Definición Preliminar de Variedad Central)**.** Definimos al conjunto:

$$W^c := \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t\in\mathbb{R}} |\pi_h \varphi_X^t(x)| < \infty\}$$

Lo llamaremos conjunto central.

Comentario 1.9. El conjunto central es aquel cuyas órbitas, al ser proyectadas sobre el espacio hiperbólico, están acotadas.

Lema 1.10 (Conjunto Central caracterizada por decaimiento)**.** *Supongamos que* $f := X - DX(0) \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ *. Entonces:*

1. *Se verifica:*
$$W^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_X^t(x) \in C_\gamma\} =: \widehat{W^c}$$

2. *Considerando la ecuación integral:*

$$A)\ y(t) = e^{At}\pi_c x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\pi_c f(y(\tau))d\tau - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}\pi_u f(y(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}\pi_s f(y(\tau))d\tau$$

Se tiene que las soluciones satisfacen:

$$W^c = \{y(0) \in \mathbb{R}^n : [\exists y \in C_\gamma : (\exists x_0 \in \mathbb{R}^n : y \vDash A)]\} =: \widehat{\widehat{W^c}}$$

Demostración. Para $t_0, t \in \mathbb{R}$, tenemos que todo flujo satisface:

$$\varphi_X^t(x) = e^{A(t-t_0)}\varphi_X^{t_0}(x) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\varphi_X^\tau(x))d\tau$$

Demostraremos que $W^c \subseteq \widehat{W^c} \subseteq \widehat{\widehat{W^c}} \subseteq W^c$.

1. ($W^c \subseteq \widehat{W^c}$): Queremos que toda la órbita se vea dominada por el crecimiento/decaímiento de C_γ. Empezando con π_h

$$\begin{aligned} x \in W^c &\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |\pi_h \varphi_X^t(x)| < \infty \\ &\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|} |\pi_h \varphi_X^t(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\pi_h \varphi_X^t(x)| < \infty \end{aligned}$$

   Ahora, para π_c, por caracterización anterior en $t_0 = 0$

$$\pi_c \varphi_X^t(x) = e^{At}\pi_c x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\pi_c f(\varphi_X^\tau(x))d\tau$$

   Usando el Lema del decaímiento exponencial:

$$\begin{aligned} |\pi_c \varphi_X^t(x)| &\leq K e^{\gamma|t|}|x| + K||f||_{C^0}\left| \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)} d\tau \right| \\ &\leq K e^{\gamma|t|}\left(|x| + \frac{||f||_{C^0}}{\gamma} \right) \\ &\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|\pi_c \varphi_X^t(x)| < \infty \\ &\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|\varphi_X^t(x)| < \infty \\ &\Rightarrow \varphi_X^t(x) \in C_\gamma \\ &\Rightarrow x \in \widehat{W^c} \end{aligned}$$

2. ($\widehat{W^c} \subseteq \widehat{\widehat{W^c}}$) Buscamos eliminar la parte lineal haciendo que tienda a 0 y que los elementos del P.V.I. que contribuyan a la ecuación integral sean todos integrales de la forma anterior salvo para el espacio central en cuyo caso haremos $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} x \in \widehat{W^c} &\Rightarrow \varphi_X^t(x) \in C_\gamma \\ &\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|\varphi_X^t(x)| < \infty \end{aligned}$$

   (a) Tomemos $t \in \mathbb{R}$ y $t_0 \geq \max\{t, 0\}$. Se obtiene, por Lema del decaímiento exponencial:

$$\begin{aligned} |e^{A(t-t_0)}\pi_u \varphi_X^{t_0}(x)| &\leq K e^{\beta(t-t_0)}|\varphi_X^{t_0}(x)| \\ &= K e^{\beta t-(\beta-\gamma)t_0}|e^{-\gamma t_0}\varphi_X^{t_0}(x)| \\ &\leq K e^{\beta t-(\beta-\gamma)t_0}||\varphi_X^t(x)||_\gamma \overset{t_0\to\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow \lim_{t_0\to\infty} |e^{A(t-t_0)}\pi_u \varphi_X^{t_0}(x)| &= 0 \end{aligned}$$

Con el límite debido a $\varphi_X^t(x) \in C_\gamma$ por tanto $|e^{-\gamma t_0}\varphi_X^{t_0}(x)|$ acotado por $||\varphi_X^t(x)||_\gamma$ y la expresión de la derecha tiende a 0 al considerar a t fijo y aprovechando que $-(\beta-\gamma)<0$.

Con lo último tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_X^t(x) &= e^{A(t-t_0)}\varphi_X^{t_0}(x) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\varphi_X^\tau(x))d\tau \\
\Rightarrow \pi_u\varphi_X^t(x) &= e^{A(t-t_0)}\pi_u\varphi_X^{t_0}(x) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))d\tau \\
\Rightarrow \pi_u\varphi_X^t(x) &= -\lim_{t_0\to\infty}\int_t^{t_0} e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))d\tau = -\int_t^{t_0} e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))d\tau
\end{aligned}$$

(b) De forma análoga, tomamos $t \in \mathbb{R}$ y $t_0 \leq \min\{t, 0\}$ para obtener:

$$\begin{aligned}
|e^{A(t-t_0)}\pi_s\varphi_X^{t_0}(x)| &\leq Ke^{-\beta(t-t_0)}|\varphi_X^{t_0}(x)| \\
&= Ke^{-\beta t+(\beta-\gamma)t_0}|e^{-\gamma(-t_0)}\varphi_X^{-(-t_0)}(x)| \\
&\leq Ke^{-\beta t-(\beta-\gamma)(-t_0)}||\varphi_X^{-t}(x)||_\gamma \overset{t_0\to\infty}{\to} 0 \\
\Rightarrow \lim_{t_0\to-\infty}|e^{A(t-t_0)}\pi_s\varphi_X^{t_0}(x)| &= 0
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos:

$$\pi_s\varphi_X^t(x) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))d\tau$$

De donde se obtiene:

$$\varphi_X^t(x) = \pi_c\varphi_X^t(x) + \pi_s\varphi_X^t(x) + \pi_u\varphi_X^t(x) \Rightarrow \varphi_X^t(x) \vDash A$$

Por la propiedad de estar en C_γ, se cumplen ambas condiciones de $\widehat{\widehat{W^c}}$ con $x_0 = x$. Por tanto $x \in \widehat{\widehat{W^c}}$

3. $(\widehat{\widehat{W^c}} \subseteq W^c)$ Nos basta tomar el P.V.I. formado a partir de las condiciones iniciales

$y(0)$ para obtener las órbitas a partir de esas funciones:

$$\begin{aligned}
y_0 \in \widehat{\widehat{W^c}} &\Rightarrow \exists y \in C_\gamma : [(\exists x \in \mathbb{R}^n : y \vDash A) \wedge (y(0) = y_0)] \\
&\Rightarrow y(t) = e^{At}\pi_c x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\pi_c f(y(\tau))d\tau \\
&- \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}\pi_u f(y(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)}\pi_s f(y(\tau))d\tau \\
&\Rightarrow y(t) = e^{At}\pi_c x + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\pi_c f(y(\tau))d\tau \\
&- e^{At}\left(\int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u f(y(\tau))d\tau + \int_0^t e^{-A\tau}\pi_u f(y(\tau))d\tau\right) \\
&+ e^{At}\left(\int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s f(y(\tau))d\tau + \int_0^t e^{-A\tau}\pi_s f(y(\tau))d\tau\right) \\
&\Rightarrow y(t) = e^{At}\left(\pi_c x + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s f(y(\tau))d\tau - \int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u f(y(\tau))d\tau\right) \\
&+ \int_0^t e^{A(t-\tau)}(\pi_c + \pi_u + \pi_s) f(y(\tau))d\tau \\
&\Rightarrow y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(y(\tau))d\tau
\end{aligned}$$

Luego y es solución del P.V.I.:

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(0) = y_0 \end{cases}$$

De donde, por parte anterior, para curvas solución:

$$\begin{aligned}
|\pi_u y(t)| &= \left| - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))d\tau \right| \\
&\leq \int_t^\infty |e^{A(t-\tau)}\pi_u f(\varphi_X^\tau(x))|d\tau \\
&\leq K||f||_{C^0} \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)}d\tau \\
&= \frac{K}{\beta}||f||_{C^0} < \infty \\
\Rightarrow |\pi_u y(t)| &\leq \frac{K}{\beta}||f||_{C^0} < \infty
\end{aligned}$$

lo último por $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$

Luego (argumentando de manera análoga): $|\pi_h y(t)| < \infty$. De donde $y_0 \in W^c$. Se concluye la inclusión y por tanto la igualdad.

$\square$

Comentario 1.11. Lo que el Lema nos indica es que:

1. Si para una órbita, al proyectarse sobre el espacio hiperbólico, está acotada, entonces está controlada por crecimiento mayor al del espacio central, decrecimiento menor al del eespacio no central.
2. Si se verifica lo segundo, existe una curva en el espacio de funciones con dicho control de forma que esta verifique la versión del P.V.I. en su forma de ecuación integral cuando $t_0 \to \infty$.
3. Si se verifica esa versión integral, entonces el conjunto está formado por puntos de órbitas acotadas.
4. Cabe mencionar que el conjunto es invariante, debido a la segunda caracterización. En efecto, la segundo sólo implica que las órbitas obedezcan un control de decaímiento, por lo cual cualquier elemento de la órbita de un punto estará en el conjunto.

Definición 1.12 (Funciones Partes)**.** Consideremos la ecuación integral anterior y definamos las funciones partes de la siguiente forma:

1. Definimos la función primera función parte como:

$$\begin{aligned} F : E_c &\to C_\gamma \\ \xi &\mapsto F(\xi)(t) = e^{At}\xi \end{aligned}$$

La función anterior se llamará función parte lineal de A.

2. Definamos las funciones parte integral estable/inestable/central como:

$$\begin{aligned} G_s : C_\gamma &\to C_\gamma \\ y &\mapsto G_s(y)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_s y(\tau)d\tau \\ G_u : C_\gamma &\to C_\gamma \\ y &\mapsto G_u(y)(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{A(t-\tau)}\pi_u y(\tau)d\tau \\ G_c : C_\gamma &\to C_\gamma \\ y &\mapsto G_c(y)(t) = \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_c y(\tau)d\tau \end{aligned}$$

3. Finalmente definimos también la función parte integral de A:

$$\begin{aligned} G : C_\gamma &\to C_\gamma \\ y &\mapsto G(y)(t) = \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_c y(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{A(t-\tau)}\pi_u y(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\pi_s y(\tau)d\tau \end{aligned}$$

es inmediato ver que $G = G_c + G_u + G_s$

Comentario 1.13. Notar la linealidad de las funciones partes:

$$F(\xi_1 + \lambda\xi_2) = F(\xi_1) + \lambda F(\xi_2)$$
$$G(\xi_1 + \lambda\xi_2) = G(\xi_1) + \lambda G(\xi_2)$$

Esta se debe a la linealidad de la integral, de las transformaciones lineales y la linealidad de la composición y suma de funciones lineales.

Definición 1.14 (Función J ec. integral)**.** Definamos a la función $J : E_c \times C_\gamma \to C_\gamma$ por:

$$J(\xi, y) := F(\xi) + G(f \circ y)$$

Comentario 1.15. Sea $\xi \in E_c$, entonces $J(\xi, y) = y \iff y$ solución de la ecuación integral con $x = \xi$. Es decir:

$$J_\xi(y) = J(\xi, y) = y \iff y \vdash A(\xi)$$

Lema 1.16 (Punto Fijo de J_ξ)**.** *La función J_ξ que induce a la ecuación integral admite un punto fijo, es decir, una familia de curvas "indexada" por los puntos del espacio central:*

$$\exists \delta_0 = \delta_0(A) > 0 : [(Lip(f) < \delta_0) \Rightarrow (\forall \xi \in E_c, \exists! y = x^*(\cdot, \xi) : J(\xi, y) = y)]$$

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned} J(\xi, y_1) - J(\xi, y_2) &= G(f \circ y_1) - G(f \circ y_2) \\ &= G(f \circ y_1 - f \circ y_2) \end{aligned}$$

Por decaímiento exponencial:

$$\begin{aligned} |G_c(f \circ y_1 - f \circ y_2)(t)| &= |\int_0^t e^{A(t-\tau)} \pi_c(f \circ y_1(\tau) - f \circ y_2(\tau)) d\tau| \\ &\leq K \,\mathrm{Lip}(f) \int_0^t e^{\alpha|t-\tau|} |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \\ &\leq K \,\mathrm{Lip}(f) \int_0^t e^{\alpha|t-\tau|} e^{\gamma|\tau|} \left(e^{-\gamma|\tau|} |y_1(\tau) - y_2(\tau)| \right) d\tau \\ &\leq K \,\mathrm{Lip}(f) \int_0^t e^{\alpha|t-\tau|} e^{\gamma|\tau|} \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} e^{-\gamma|s|} |y_1(s) - y_2(s)| \right) d\tau \\ &= K \,\mathrm{Lip}(f) ||y_1 - y_2||_\gamma \int_0^t e^{\alpha|t-\tau|} e^{\gamma|\tau|} d\tau \\ &\leq K \,\mathrm{Lip}(f) ||y_1 - y_2||_\gamma \frac{e^{\gamma|t|}}{\gamma - \alpha} \end{aligned}$$

De modo análogo:

$$|G_u(f\circ y_1)(t) - G_u(f\circ y_2)(t)| \leq K\,\mathrm{Lip}(f)||y_1-y_2||_\gamma \frac{e^{\gamma|t|}}{\beta-\gamma}$$
$$|G_s(f\circ y_1)(t) - G_s(f\circ y_2)(t)| \leq K\,\mathrm{Lip}(f)||y_1-y_2||_\gamma \frac{e^{\gamma|t|}}{\beta-\gamma}$$

Sumando todo y por Desig. Triangular:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|G(f\circ y_1)(t) - G(f\circ y_2)(t)| \leq K\left(\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{2}{\beta-\gamma}\right)\mathrm{Lip}(f)||y_1-y_2||_\gamma$$

Escogemos:

$$\delta_0 = \frac{1}{3}\frac{1}{K\left(\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{2}{\beta-\gamma}\right)}$$

Si $\mathrm{Lip}(f) < \delta_0$, se verifica:

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{2}{\beta-\gamma}\right)\mathrm{Lip}(f) &< \frac{1}{3}\\
\Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}|G(f\circ y_1)(t) - G(f\circ y_2)(t)| &\leq \frac{1}{3}||y_1-y_2||_\gamma\\
\Rightarrow ||G(f\circ y_1) - G(f\circ y_2)||_\gamma &\leq \frac{1}{3}||y_1-y_2||_\gamma\\
\Rightarrow ||J(\xi,y_1) - J(\xi,y_2)||_\gamma &\leq \frac{1}{3}||y_1-y_2||_\gamma
\end{aligned}$$

Luego es un mapeo contractivo y por Teorema de Punto Fijo para mapeos contractivos, se verifica el Lema. □

Comentario 1.17. Es decir, existe una única solución a la ecuación integral para todo punto del espacio central, de donde existe una familia de curvas con crecimiento/decaímiento exponencial controlado la cual está indexada por el conjunto entral.. Es decir, para todo punto del espacio central $\xi = \pi_c x \in E_c$, hay un único punto en el conjunto central $y(0) \in W^c$ de modo tal que haya una única curva $y \in C_\gamma$ descrita por la ecuación integral A (y por tanto, por la función J) indexada por el punto ξ. Esta indexación corresponde a que la curva solución de la parte lineal dada por $F(\xi) = e^{At\xi} = e^{At}\pi_c x$ sea perturbada por $G(f\circ y)$. La unicidad de la indexación indica que podemos ver al conjunto central como una perturbación geométrica del espacio central. Es decir, que podemos ver al conjunto central como una variedad.

Definición 1.18 (Perturbación de un subespacio)**.** Sea $U \leq \mathbb{R}^n$ subconjunto abierto de algún subespacio de $\mathbb{R}^n$

Decimos que W es una perturbación de U si

$$\exists(\phi : U \to V) : W = \{x+\phi(x) \in \mathbb{R}^n : x \in U\} = (\mathrm{Id}+\phi)(U)$$

Donde $V \leq \mathbb{R}^n$ algún subespacio transversal a U y ϕ continua. En caso ϕ sea Lipschitz, se dirá que el conjunto W es Lipschitz.

Proposición 1.19 (Perturbación de un subespacio es Variedad)**.** *Toda perturbación Lipschitz de un subespacio (para constante de Lipschitz menor a 1) es una Variedad topológica*

Demostración. Por el Teorema 14.3 de **azagra2021calculo** sabemos que toda perturbación de la identidad $K-$Lipschitz es homeomorfismo (para $K < 1$), de donde la perturbación W del subespacio U es la imagen bajo el homeomorfismo $(\mathrm{Id} + \phi)$. Con esto se tiene que W es homeomorfo (y por tanto, localmente homeomorfo) a U el cual es trivialmente localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ para algún $m \in \{1, \ldots, n\}$ (su dimensión es dada por la dimensión del subespacio que contenga a U), de donde se tiene que W es variedad topológica. □

Comentario 1.20.

1. Notar que para aplicar el teorema sólo requerimos que U sea variedad topológica, de donde podemos generalizar la idea anterior a perturbación de una superficie. En realidad, este concepto se generaliza al de haz fibrado, en el cual tenemos que la transversalidad está dada por el espacio sobre el cual se completa a toda la variedad ambiente, siguiendo el siguiente diagrama:

2. Para evitar mayores tecnicismos e introducirnos de manera progresiva en el estudio de variedades invariantes utilizaremos únicamente nuestra versión de la proposición.

Lema 1.21 (Existencia de función Lipschitz que caracterice al conjunto central)**.** *Si* $\mathrm{Lip}(f) < \delta_0$*, entonces existe una única función Lipschitz* $\phi \in C_b^0(E_c, E_h)$ *que verifica:*

$$W^c = \{x_c + \phi(x_c) : x_c \in E_c\}$$

Demostración.

1. Por los Lemas anteriores la Ecuación Integral A tiene una única solución:

$$x^*(t, \xi) = \varphi_X^t(x^*(0, \xi))$$

Para todo $\xi \in E_c$.

2. Por Lema anterior de caracterización (tomando el otro lema de la expresión de la curva $y = x_\xi^*$ y usando el hecho de que todas las curvas del estilo cumplen escritura por Lema de punto fijo):

$$W^c = \{x^*(0, \xi) : \xi \in E_C\}$$

3. Notemos que:

$$x^*(0, \xi) = J(\xi, x^*(\cdot, \xi))(0) = \xi + \phi(\xi) \forall \xi \in E_c$$

donde:

$$\phi(\xi) := -\int_0^\infty e^{-A\tau} \pi_u f(x^*(\tau, \xi)) d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} \pi_s f(x^*(\tau, \xi)) d\tau$$

4. De lo anterior, se deduce que:

$$\begin{aligned}
|\int_0^{\infty} e^{-A\tau}\pi_u f(x^*(\tau,\xi))d\tau| &= |\int_{-\infty}^{0} e^{A\tau}\pi_u f(x^*(-\tau,\xi))d\tau| \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} |e^{A\tau}\pi_u f(x^*(-\tau,\xi))|d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} Ke^{\beta\tau}|f(x^*(-\tau,\xi))|d\tau \\
&\leq K||f||_{C^0}\int_{-\infty}^{0} e^{\beta\tau}d\tau = \frac{K}{\beta}||f||_{C^0} < \infty
\end{aligned}$$

5. De forma análoga:

$$|\int_{-\infty}^{0} e^{-A\tau}\pi_s f(x^*(\tau,\xi))d\tau| < \infty$$

6. Recordando de la demostración anterior de G_u, G_s Lipschitz, tenemos que, para $y_1(t) = x^*(t,\xi), y_2(t) = x^*(t,\hat{\xi})$, y haciendo $t = 0$

$$|\phi(\xi) - \phi(\hat{\xi})| \leq \frac{1}{3}||x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})||_\gamma$$

Además, si $\xi, \hat{\xi} \in E_c$:

$$\begin{aligned}
|x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})| &= |J(\xi, x^*(\cdot,\xi))(t) - J(\hat{\xi}, x^*(\cdot,\hat{\xi}))(t)| \\
&\leq |F(\xi - \hat{\xi})(t)| + |G(f(x^*(\cdot,\xi))(t) - G(f(x^*(\cdot,\hat{\xi}))(t)|
\end{aligned}$$

7. Usando los resultados anteriores (cota exponencial de primer lema y cota para G's):

$$||x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})||_\gamma \leq Ke^{-(\gamma-\alpha)|t|}|\xi - \hat{\xi}| + \frac{1}{3}||x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})||_\gamma$$

De donde se concluye:

$$||x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})||_\gamma \leq \frac{3K}{2}|\xi - \hat{\xi}|$$

Y finalmente se concluye, para todo $\xi, \hat{\xi} \in E_c$:

$$|\phi(\xi) - \phi(\hat{\xi})| \leq \frac{K}{2}|\xi - \hat{\xi}|$$

De donde no es sólo Lipschitz, sino que caracteriza al conjunto central reescrbiendo $W^c = \{x_c + \phi(x_c)\}$ en la descripción dada al inicio de la prueba, por ser la solución en $t = 0$ de la solución de la ecuación integral.

□

Comentario 1.22. Por definición de C_γ podemos reescribir la penúltima ecuación como:

$$|x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})| \leq \frac{3K}{2} e^{\gamma|t|}|\xi - \hat{\xi}|$$

Para todos $\gamma \in (\alpha, \beta), \xi, \hat{\xi} \in E_c, t \in \mathbb{R}$

Teorema 1.23 (Existencia de la Variedad Central Global)**.** *1. Existe un* $\delta_0 = \delta_0(dX(0)) > 0$ *que verifica que:*

$$f \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Lip}(f) < \delta_0 \Rightarrow W^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{t\in\mathbb{R}} |\pi_h \varphi_X^t(x)| < \infty\}$$

invariante y superficie Lipschitz de $\mathbb{R}^n$

Es decir,

$$f \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Lip}(f) < \delta_0 \Rightarrow \exists! \phi \in C_b^0(E_c, E_h) : \phi \textit{ Lipschitz}, W^c = \{x_c + \phi(x_c) : x_c \in E_c\}$$

2. Si $\psi \in C_b^0(E_c, E_h)$ *y* $M_\psi = \{x_c + \psi(x_c) : x_c \in E_c\}$ *es invariante. Entonces* $M_\psi = W^c$ *y* $\psi = \phi$

Demostración. 1. La primera parte fue probada en el Lema anterior

2. La unicidad se debe a que como la variedad es invariante, la proyección commuta de acuerdo a:

$$\pi_h \hat{x}(t, x_c + \psi(x_c)) = \psi(\pi_c \hat{x}(t, x_c + \psi(x_c)))$$

3. Como $\psi \in C_b^0(E_c, E_h)$, la acotación de ψ implica la de $\pi_c \hat{x}(t, x_c + \psi(x_c))$, luego $x_c + \psi(x_c) \in W^c (\forall x_c \in E^c)$

4. Ya probamos la unicidad para funciones Lipschitz que verifiquen que caractericen a W^c, luego ambas variedades son las mismas.

5. Para ver que sea variedad basta tomar ϕ como función perturbación y W^c como perturbación del espacio central.

□

Definición 1.24 (Variedad Central Global)**.** W^c definido como antes se llama la variedad central global.

Comentario 1.25. La variedad central global recibe ese nombre debido a que es variedad topológica (En la próxima sección veremos que es variedad suave), es una perturbación que respeta la esencia del comportamiento de las órbitas del espacio central (parte no hiperbólica de la parte lineal) y está definida globalmente, bajo la condición fuerte de que $\mathrm{Lip}(f) < \delta_0$, la cual deberemos debilitar para incluir a una mayor cantidad de funciones, perdiendo dicha globalidad.

1.1 Suavidad de Variedad Central Global

Comentario 1.26. Para cualquier $\sigma > 0$, se verifica la inclusión continua $C_\gamma \subseteq C_{\gamma+\sigma}$ por $||x||_{\gamma+\sigma} \leq ||x||_\gamma$

Además, recordar que $x^*(t,\xi)$ es la solución única de la ecuación integral, de donde:

$$x^*(t,\xi) = e^{At}\xi + G(f(x^*(\cdot,\xi)))(t)$$

Lema 1.27 (Para derivada acotada, se puede modificar crecimiento/decaímiento de flujos)**.** *Supongamos que $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ y que $||Df|| < \delta_0$. Existe un $\sigma > 0$ que cumple que la función:*

$$\begin{aligned} \theta : E_c &\to C_{\gamma+\sigma} \\ \xi &\mapsto x^*(\cdot,\xi) \end{aligned}$$

es diferenciable. Es decir:

$$\forall f \in C_b^1(\mathbb{R}^n), ||Df|| < \delta_0 \Rightarrow \exists\sigma > 0 : [\theta : \xi \mapsto x^*(\cdot,\xi) \text{ dif.}]$$

Demostración. 1. Definamos las funciones:

$$\begin{aligned} u(t,\xi,\hat{\xi}) &= x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi}) \\ f^*(t,\xi,\hat{\xi}) &= f(x^*(t,\xi)) - f(x^*(t,\hat{\xi})) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))u(t,\xi,\hat{\xi}) \end{aligned}$$

2. Definamos:

$$\begin{aligned} L_{\xi,\hat{\xi}}(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) &= G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) \\ N_{\xi,\hat{\xi}}(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) &= G(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi})) \end{aligned}$$

   (a) Empecemos creando como dominio:

$$D := \{w \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) : (\exists\xi,\hat{\xi} \in E_c : w(\cdot) = x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi}))\}$$

   (b) Notamos que la ambas funciones pueden darse como sigue:

$$\begin{aligned} L : D \times E_c \times E_c \subseteq C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \times E_c \times E_c &\to C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \\ (u(\cdot,\xi,\hat{\xi}),\xi,\hat{\xi}) &\mapsto G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) \\ N : D \times E_c \times E_c \subseteq C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \times E_c \times E_c &\to C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n) \\ (u(\cdot,\xi,\hat{\xi}),\xi,\hat{\xi}) &\mapsto G(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi})) \end{aligned}$$

   Ambas funciones inducen $L_{\xi,\hat{\xi}}(\cdot) := L(\cdot,\xi,\hat{\xi}), N_{\xi,\hat{\xi}}(\cdot) := N(\cdot,\xi,\hat{\xi})$. De donde tenemos que ambas funciones $L_{\xi,\hat{\xi}}, N_{\xi,\hat{\xi}}$ mandan curvas a curvas. Notar que dichas funciones están indexadas por el espacio central para evitar probar la unicidad de las curvas de D con respecto a los pares del espacio central que toman

3. Por comentario:

$$
\begin{aligned}
&x^*(t,\xi) = e^{At}\xi + G(f(x^*(\cdot,\xi)))(t)\\
\Rightarrow&(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi}) - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))\\
\Rightarrow&(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = F(\xi-\hat{\xi}) + G(f(x^*(\cdot,\xi))) - G(f(x^*(\cdot,\hat{\xi}))) - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))\\
\Rightarrow&(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = F(\xi-\hat{\xi}) + G(f(x^*(\cdot,\xi))) - G(f(x^*(\cdot,\hat{\xi}))) - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))\\
\Rightarrow&(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = F(\xi-\hat{\xi}) + G(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi}))\\
\Rightarrow&(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = F(\xi-\hat{\xi}) + N(u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))
\end{aligned}
$$

4. Como antes:

$$
\begin{aligned}
|G(Df(x^*(\cdot,\xi))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)| &= |\int_0^t e^{A(t-\tau)}\pi_c Df(x^*(\tau,\xi))u(\tau,\xi,\hat{\xi}))(t)d\tau|\\
&\leq K||Df||\cdot|\int_0^t e^{\alpha|t-\tau|}|u(\tau,\xi,\hat{\xi})|d\tau|\\
\Rightarrow |G(Df(x^*(\cdot,\xi))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)| &\leq K||Df||\frac{e^{\gamma|t|}}{\gamma-\alpha}||u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))||_\gamma\\
\Rightarrow ||L_{\xi,\hat{\xi}}(u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))||_\gamma = ||G(Df(x^*(\cdot,\xi))u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))||_\gamma &\leq \frac{1}{3}||u(\cdot,\xi,\hat{\xi})||_\gamma
\end{aligned}
$$

De donde $||L_{\xi,\hat{\xi}}|| \leq \frac{1}{3}$

5. Por serie de Von Neumann $\exists(Id - L_{\xi,\hat{\xi}})^{-1}$ y es acotado (perturbación de la identidad) De donde podemos escribir:

$$u(\cdot,\xi,\hat{\xi}) = (Id - L_{\xi,\hat{\xi}})^{-1}F(\xi-\hat{\xi}) + (Id - L_{\xi,\hat{\xi}})^{-1}N_{\xi,\hat{\xi}}(u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))$$

Es decir, descomponemos la curva de la izquierda en dos imágenes del operador inverso.

6. Escogemos un σ suficientemente pequeño para que verifique que $\gamma+\sigma$ cumpla estar en (α,β), por tanto cumpliendo los Teoremas de antes para acotación de $\mathrm{Lip}(f)$ y para ésta última.

7. Ahora bien, descomponemos la función N como:

$$
\begin{aligned}
N_u(t) &= G_u(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)\\
N_s(t) &= G_s(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)\\
N_c(t) &= G_c(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)\\
\Rightarrow N(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) &= N_u + N_s + N_c
\end{aligned}
$$

8. Dado $\epsilon > 0$ fijo, arbitrario, escojamos $T > 0$ suficientemente grande como para que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{18K^2}{\epsilon(\gamma-\alpha)}||Df||\right) &< T \\ \Rightarrow \frac{3K^2}{\gamma-\alpha}||Df||e^{-\sigma T} &< \frac{\epsilon}{6} \end{aligned}$$

donde α, K constantes de la cota dada.

9. Consideremos los casos $t \in [-T,T]$, $t \notin [-T,T]$:

(a) ($|t| \leq T$) Supongamos que $0 \leq t \leq T$.
Por definición de f^*, cota de Lipschitz de x^* en los parámetros del espacio central, sobre la descomposición de N:

$$\begin{aligned} |N_c(t)| &= \left|\int_0^t e^{(t-\tau)A}\pi_c f^*(\tau,\xi,\hat{\xi})d\tau\right| \\ &= \left|\int_0^t e^{(t-\tau)A}\pi_c\left(\int_0^1 [Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))]d\lambda\right)(x^*(\tau,\xi)-x^*(\tau,\hat{\xi}))d\tau\right| \\ &\leq Ke^{\alpha|t|}\frac{3K}{2}|\xi-\hat{\xi}|\int_0^t e^{(\gamma-\alpha)\tau}\left(\int_0^1 |Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))|d\lambda\right)d\tau \\ &\leq \frac{3K^2}{2}e^{\alpha|t|}|\xi-\hat{\xi}|\int_0^T e^{(\gamma-\alpha)|t|}\left(\int_0^1 |Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))|d\lambda\right)d\tau \\ &\leq \frac{3K^2}{2}e^{\gamma|t|}|\xi-\hat{\xi}|\int_0^T\int_0^1 |Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))|d\lambda d\tau \end{aligned}$$

Como $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, y el integrando se toma sobre $[0,T]\times[0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto, entonces es uniformemente continuo, además $x^*(\cdot,\xi) \to x^*(\cdot,\hat{\xi})$ dado por cota Lipschitz anterior de manera uniforme.
Luego:

$$\begin{aligned} \forall\epsilon_0 > 0\exists\eta_0 > 0 : |\xi-\hat{\xi}| < \eta_0 &\Rightarrow ||x^*(\cdot,\xi)-x^*(\cdot,\hat{\xi})||_\gamma < \epsilon_0 \\ \forall\epsilon' > 0\exists\eta' > 0 : |u-v| < \eta' &\Rightarrow |Df(u)-Df(v)| < \epsilon' \end{aligned}$$

Por tanto se cumple que para ϵ arbitrario, podemos escoger el η que verifique la cota dada por $\epsilon_0 = \eta', \epsilon' = \frac{\epsilon}{3}\frac{2}{3K^2T}$. Es decir, que dado un ϵ fijo y arbitrario tomamos el η' de la forma anterior, para luego a partir de ese número obtener alguno de los η' que garantiza la 2da implicación. Con este η' obtenemos el número η_0 que garantice la primera implicación. A partir de dicho $\eta = \eta_0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} |\xi-\hat{\xi}| < \eta &\Rightarrow |(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-(x^*(\tau,\hat{\xi}))| \\ &= |(1-\lambda)|\cdot|x^*(\tau,\xi)-x^*(\tau,\hat{\xi})| < \epsilon_0 = \eta' \\ &\Rightarrow |Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))| < \epsilon' \end{aligned}$$

Aplicando esta cota sobre el integrando obtenemos:

$$
\begin{aligned}
e^{-(\gamma+\sigma)|t|}|N_c(t)| &\leq \frac{3K^2}{2}e^{-\sigma|t|}|\xi-\hat{\xi}|\int_0^T\int_0^1 |Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi}))-Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))|d\lambda d\tau \\
&\leq \frac{3K^2}{2}e^{-\sigma|t|}|\xi-\hat{\xi}|\epsilon' T \\
&\leq \frac{3K^2}{2}|\xi-\hat{\xi}|\epsilon' T \\
&\leq \frac{\epsilon}{3}|\xi-\hat{\xi}|
\end{aligned}
$$

La única diferencia con el caso negativo es que el $e^{-\sigma|t|}$ acotado por 1 (evidente por tomar $t > 0$)

De donde podemos resumir el argumento anterior como (usando el hecho de que todo conjunto acotado admite supremo):

$$\exists \mu_1 > 0 : (|\xi-\hat{\xi}| \leq \mu_1 \Rightarrow \sup_{|t|\leq T} e^{-(\gamma+\sigma)|t|}|N_c| \leq \frac{\epsilon}{3}|\xi-\hat{\xi}|)$$

(b) ($|t| > T$) Supongamos que $t > T$.

Descompongamos N_c como $N_c(t) = N_c^1(t) + N_c^2(t)$. Donde:

$$
\begin{aligned}
N_c^1(t) &= \int_0^T e^{(t-\tau)A}\pi_c f^*(\tau,\xi,\hat{\xi})d\tau \\
N_c^2(t) &= \int_T^t e^{(t-\tau)A}\pi_c f^*(\tau,\xi,\hat{\xi})d\tau
\end{aligned}
$$

Abordemos las 2 cotas:

i. Como la primera integral tiene la misma forma que la anterior, podemos repetir argumento (El t fue abandonado en la cota para ser reemplazado por T con valor máximo dentro de la función integrando de la penúltima desigualdad y aprovechamos la división entre un valor menor igual a 1 para dividir, luego el argumento es idéntico).
Por tanto:

$$\exists \mu_2 > 0 : (|\xi-\hat{\xi}| \leq \mu_2 \Rightarrow \sup_{|t|>T} e^{-(\gamma+\sigma)|t|}|N_c^1| \leq \frac{\epsilon}{6}|\xi-\hat{\xi}|)$$

ii. Desarrollando la segunda integral:

$$
\begin{aligned}
|N_c^2(t)| &= \left| \int_T^t e^{(t-\tau)A}\pi_c f^*(\tau,\xi,\hat{\xi})d\tau \right| \\
&= \left| \int_T^t e^{(t-\tau)A}\pi_c \left(\int_0^1 [Df(\lambda x^*(\tau,\xi)+(1-\lambda)x^*(\tau,\hat{\xi})) - Df(x^*(\tau,\hat{\xi}))]d\lambda \right) \right. \\
&\qquad \left. (x^*(\tau,\xi)-x^*(\tau,\hat{\xi}))d\tau \right| \\
&\leq \frac{3K}{2}|\xi-\hat{\xi}| \int_T^t Ke^{(t-\tau)\alpha}2||Df||e^{\gamma\tau}d\tau \\
&= 3K^2|\xi-\hat{\xi}|e^{t\alpha}||Df|| \int_T^t e^{\tau(\gamma-\alpha)}d\tau \\
&= 3K^2|\xi-\hat{\xi}|e^{t\alpha}||Df|| \frac{1}{(\gamma-\alpha)} e^{\tau(\gamma-\alpha)}\Big|_T^t \\
&= 3K^2|\xi-\hat{\xi}|e^{t\alpha}||Df|| \frac{1}{(\gamma-\alpha)} \left(e^{t(\gamma-\alpha)} - e^{T(\gamma-\alpha)} \right) \\
&\leq 3K^2|\xi-\hat{\xi}| \cdot ||Df|| \frac{1}{(\gamma-\alpha)} e^{t\gamma}
\end{aligned}
$$

Por la elección de σ, obtemeos:

$$e^{-(\gamma+\sigma)|t|}|N_c^2(t)| < \frac{\epsilon}{6}|\xi-\hat{\xi}|$$

iii. Luego se cumple que sumando se obtiene la desigualdad con respecto de factor $\frac{\epsilon}{3}$

10. De donde siempre se cumple, para $\mu_c = \min\{\mu_1, \mu_2\}$:

$$|\xi-\hat{\xi}| < \mu_c \Rightarrow ||N_c||_{\gamma+\sigma} \leq \frac{\epsilon}{3}|\xi-\hat{\xi}|$$

11. Análogamente podemos obtener μ_u, μ_s verificando:

$$
\begin{aligned}
|\xi-\hat{\xi}| < \mu_u \Rightarrow ||N_u||_{\gamma+\sigma} \leq \frac{\epsilon}{3}|\xi-\hat{\xi}| \\
|\xi-\hat{\xi}| < \mu_s \Rightarrow ||N_s||_{\gamma+\sigma} \leq \frac{\epsilon}{3}|\xi-\hat{\xi}|
\end{aligned}
$$

12. De donde existe un $\sigma > 0$ que verifica que:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \mu > 0 : (\xi, \hat{\xi} \in E_c \wedge |\xi-\hat{\xi}| \leq \mu) \Rightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(\gamma+\sigma)|t|}|N(u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))(t)| \leq \epsilon|\xi-\hat{\xi}|$$

Lo que se entiende como que:

$$||N(u(\cdot,\xi,\hat{\xi}))||_{\gamma+\sigma} = o(|\xi-\hat{\xi}|)$$

Cuando $\xi \to \hat{\xi}$

13. Por definición de derivada, la expresión de u en términos de F de clase C^∞, de $\mathrm{Id} - L$ de clase C^∞ y de N de orden $o(|\xi-\hat{\xi}|)$ nos permite obtener que la diferencia con respecto de $x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})$ tiene orden $o(|\xi-\hat{\xi}|)$, lo cual es la definición de derivada, luego la función es diferenciable.

□

Lema 1.28 (G continua en parámetro espacial sobre g uniformemente acotado, continua)**.** *Sea E espacio euclideo con norma euclidea $||\cdot||_E$. Dado un mapeo parametrizado:*

$$g : E \to \bigcup_{\rho\in(\alpha,\beta)} C_\rho$$
$$y \mapsto g(\cdot,y) = g_y(\cdot)$$

que verifica:

1. *$g(t,y)$ continuo en $(t,y) \in \mathbb{R}\times E$*

2. *$\exists M > 0 : (\forall y \in E, ||g(\cdot,y)||_\rho \leq M)$*

Entonces:

$$\forall(\gamma_0,y_0) \in (\rho,\beta)\times E, \lim_{||y-y_0||_E\to 0} ||G(g(\cdot,y)) - G(g(\cdot,y_0))||_{\gamma_0} = 0$$

donde $G : C_\rho \to C_\xi$ parte integral de A.

Demostración. 1. Dado un $\epsilon > 0$ pequeño, encontramos un $T > 0$ verificando que:

$$\frac{1}{\xi-\rho}\ln(\frac{6M}{\epsilon}) < T \Rightarrow Me^{-(\xi-\rho)T} < \frac{\epsilon}{6}$$

2. Usamos un argumento análogo al Lema anterior, recordando que $N(u(\cdot,\xi,\hat{\xi})) = G(f^*(\cdot,\xi,\hat{\xi}))$, podemos usar argumento análogo sobre las propiedades de f^* y de g.

3. Para la primera parte, podemos argumentar de forma similar al item 9.a del Lema anterior:

    (a) En el primer caso, sobre la parte compacta $[-T,T]$, usamos el hecho de f^* puede admitir una escritura en forma de integral, la cual tiene un integrando con argumentos de parámetros que al tender a acercarse, acercan arbitrariamente dicha diferencia, logrando acotarse por ese valor arbitrario.

(b) Tomemos el valor de $|G_c(g(t,y)) - G_c(g(t,y_0))|$. Esta integral, para valores de $t \in [-T,T]$ también se expresa como:

$$
\begin{aligned}
|G_c(g(\cdot,y)) - G_c(g(\cdot,y_0))| &= \left| \int_0^T e^{(t-\tau)A}\pi_c(g(\tau,y) - g(\tau,y_0))d\tau \right| \\
&\leq Ke^{\alpha|t|}\int_0^T e^{-\tau\alpha}|g(\tau,y) - g(\tau,y_0)|d\tau \\
&\leq Ke^{\alpha|t|}\int_0^T |g(\tau,y) - g(\tau,y_0)|d\tau
\end{aligned}
$$

(c) Ahora bien, tomando $||y - y_0||_E < \mu_0$ suficientemente pequeño, se tiene que se tiene, por continuidad de g, que $|g(\tau,y) - g(\tau,y_0)| < \frac{\epsilon}{6}\frac{1}{KT}e^{-\alpha T}$ lo cual permite una cota por $\frac{\epsilon}{6}$

4. Podemos hacer un argumento análogo para el segundo caso:

(a) Descomponemos las integrales que componen la parte integral de la diferencia G_c en G^1 y G^2, para $|t| \geq T$.

(b) Para la parte compacta el argumento anterior es idéntico.

Para la parte no compacta $|t| > T$, usamos la condición 2 para acotar el integrando, esto es:

$$
\begin{aligned}
||g_y||_\rho &\leq M \\
\Rightarrow e^{-\rho|t|}|g(t,y)| &\leq M(\forall t \in \mathbb{R}) \\
\Rightarrow |G_c^2(g(\cdot,y)) - G_c^2(g(\cdot,y_0))| &\leq Ke^{\alpha|t|}\int_T^t e^{-\tau\alpha}|g(\tau,y) - g(\tau,y_0)|d\tau \\
&\leq Ke^{\alpha|t|}\int_T^t e^{-\tau\alpha}\Big(|g(\tau,y)| + |g(\tau,y_0)|\Big)d\tau \\
&\leq Ke^{\alpha|t|}\int_T^t e^{-\tau\alpha}2Me^{\rho\tau}d\tau \\
&\leq 2MKe^{\alpha|t|}\int_T^t e^{(\rho-\alpha)\tau}d\tau \\
&\leq 2MKe^{\alpha|t|}\frac{1}{\rho-\alpha}(e^{(\rho-\alpha)t} - e^{(\rho-\alpha)T}) \\
&\leq e^{\alpha|t|}\frac{2MK}{\rho-\alpha}(e^{(\rho-\alpha)t} - e^{(\rho-\alpha)T}) \\
\Rightarrow e^{-\xi|t|}|\Big(G_c^2(g(\cdot,y)) - G_c^2(g(\cdot,y_0))\Big)(t)| &\leq e^{(\alpha-\xi)|t|}\frac{2MK}{\rho-\alpha}(e^{(\rho-\alpha)t} - e^{(\rho-\alpha)T}) \\
&\leq e^{(\alpha-\xi)|t|}\frac{2MK}{\rho-\alpha}(e^{(\rho-\alpha)t}) \\
&\leq e^{(\rho-\xi)|t|}\frac{2MK}{\rho-\alpha} \\
&< \frac{\epsilon}{6}
\end{aligned}
$$

Luego escogiendo el μ_0 anterior, dependiendo de T escogido como antes, se obtiene que la composición se obtiene la desigualdad con ϵ arbitrario.

5. De donde, se cumple el límite.

$\square$

Comentario 1.29 (Derivada de Flujo)**.** Por Lema, el mapeo que envía parámetros del espacio central a soluciones $\theta : E_c \to C_{\gamma+\sigma}$ es diferenciable.

$$
\begin{aligned}
D_\xi x^*(t,\xi)\eta &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{x^*(t,\xi+\lambda\eta) - x^*(t,\xi)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\theta(\xi+\lambda\eta)(t) - \theta(\xi)(t)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda D\theta(\xi)\eta(t) + r(\lambda\eta)}{\lambda} \\
&= D\theta(\xi)\eta(t)
\end{aligned}
$$

1. Notemos que, para cada $\xi \in E_c$, $D_\xi x^*(\cdot,\xi) : E_c = T_\xi E_c \to T_{x^*(\cdot,\xi)}C_{\gamma+\sigma} = C_{\gamma+\sigma}$ (por ser ambos conjuntos espacios vectoriales)

2. Podemos tomar la función:

$$
\begin{aligned}
D_\xi x^*(\cdot,\xi) = D\theta(\xi) : E_c &\to L(E_c; C_{\gamma+\sigma}) \\
\eta &\mapsto D\theta(\xi)\eta(\cdot)
\end{aligned}
$$

3. La razón detrás de esto es que habíamos descrito a las soluciones según:

$$
\begin{aligned}
x^*(t,\xi) &= \varphi_X^t(x^*(0,\xi)) \\
x^*(0,\xi) &= \xi + \phi(\xi)
\end{aligned}
$$

Es decir, teníamos las curvas solución asociadas a las perturbaciones del espacio central que caracterizaban a la variedad central. Luego la dervivada $D_\xi x^*(\cdot,\xi)\eta$ es tomar un valor punto temporal de dicha curva solución y tomar la mejor aproximación lineal en la dirección de η al perturbar dichas curvas solución con respecto de la variable espacial. La función θ asigna a cada punto su curva solución. La derivada de tal función en la dirección η es la mejor aproximación lineal como vector dentro del espacio de curvas, o lo que es lo mismo, la curva que mejor representa la perturbación de una curva a otra para cada punto del espacio central. La igualdad de dicha derivada con respecto de la función θ nos permite deducir propiedades para caracterizar la variedad central. En particular, nos basta con verificar la continuidad de una (y con ello, obteniéndose la suavidad C^1) para que la suavidad de la otra se siga de forma inmediata.

4. Los siguientes lemas consisten en ver que este mapeo ($D\theta$)es continuo en $\xi \in E_c$ como mapa de E_c a $L(E_c; C_{\gamma+3\sigma})$

Lema 1.30 (Ec. Integral B caracteriza derivada parametrizada)**.** *Supongamos que* $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $||Df|| < \delta_0$*. Entonces el mapeo:*

$$\begin{aligned} \Lambda : E_c &\to L(E_c; C_{\gamma+2\sigma}) \\ \xi &\mapsto D_\xi x^*(\cdot, \xi) \end{aligned}$$

satisface la ecuación integral:

$$B)\ v(t)\eta = e^{At}\eta + G(Df(x^*(\cdot,\xi))v(\cdot)\eta)(t) \qquad \forall(\eta, t) \in E_c \times \mathbb{R}$$

donde $G : C_{\gamma+\sigma} \to C_{\gamma+2\sigma}$ *parte integral definida como antes.*

Demostración.

1. Sea $\xi, \eta \in E_c$ fijos, $\lambda \neq 0$ y definamos la función:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ (t, \lambda) &\mapsto g(t, \lambda) := \frac{x^*(t, \xi + \lambda\eta) - x^*(t, \xi)}{\lambda} \end{aligned}$$

2. Recordemos que $D_\xi x^*(t,\xi)\eta = D\theta(\xi)\eta(t) = \lim_{\lambda\to 0}(g(t,\lambda))_{\gamma+\sigma}$ existe por Lema 3.39

3. Además $x^*(\cdot, \xi)$ es Lipschitz continua en ξ por cota con $\frac{3K}{2}$. Luego $g(t, \lambda)$ es continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

    (a) Como $x^*(t, \xi)$ es el la curva solución dada sobre el punto de la variedad central, tenemos que es una función continua en t.

    (b) Para la variable de parámetros, la continuidad en 0 dada por existencia de derivada y la continuidad en $\mathbb{R} - \{0\}$ dada por ser fracción y continuidad uniforme del flujo en ξ

4. Por definición de $x^*(\cdot, \xi)$ como único punto fijo solución de la Ec. Integral A, esto es: $J(\xi, x^*(\cdot, \xi)) = x^*(\cdot, \xi)$

$$\begin{aligned}
g(t,\lambda) &= \frac{J(\xi+\lambda\eta, x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta))(t) - J(\xi, x^*(\cdot,\xi))(t)}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(J(\xi+\lambda\eta, x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta))(t) - J(\xi, x^*(\cdot,\xi))(t)\Big) \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(\lambda e^{At}\eta + G(f(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta)))(t) - G(f(x^*(\cdot,\xi)))(t)\Big) \\
&= e^{At}\eta + G(\frac{1}{\lambda}\Big(f(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta)) - f(x^*(\cdot,\xi))\Big))(t) \\
&= e^{At}\eta + G(\frac{1}{\lambda}\Big(\int_0^1 Df(x^*(t,\xi) + \mu(x^*(t,\xi+\lambda\eta) - x^*(t,\xi))) \\
&\qquad (x^*(t,\xi+\lambda\eta) - x^*(t,\xi))d\mu\Big))(t) \\
&= e^{At}\eta + G(\Big(\int_0^1 Df(x^*(t,\xi) + \mu(x^*(t,\xi+\lambda\eta) - x^*(t,\xi)))d\mu\Big) \\
&\qquad \frac{1}{\lambda}(x^*(t,\xi+\lambda\eta) - x^*(t,\xi)))(t) \\
&= e^{At}\eta + G(\Big(\int_0^1 Df(\mu x^*(t,\xi+\lambda\eta) - (1-\mu)x^*(t,\xi))d\mu\Big)g(t,\lambda))(t)
\end{aligned}$$

5. Definamos:

$$h(t,\lambda) := \frac{1}{\lambda}\Big(f(x^*(t,\xi+\lambda\eta)) - f(x^*(t,\xi))\Big)$$

Por la cadena de deducciones anteriores:

$$h(t,\lambda) = \Big(\int_0^1 Df(\mu x^*(t,\xi+\lambda\eta) - (1-\mu)x^*(t,\xi))d\mu\Big)g(t,\lambda)$$

6. Como $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$\begin{aligned}
|h(t,\lambda)| &= |\Big(\int_0^1 Df(\mu x^*(t,\xi+\lambda\eta) - (1-\mu)x^*(t,\xi))d\mu\Big)g(t,\lambda)| \\
&\leq |g(t,\lambda)| \int_0^1 ||Df||d\mu \\
&= |g(t,\lambda)| \cdot ||Df||
\end{aligned}$$

7. Recordemos que $e^{-\gamma|t|}|x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})| \leq \frac{3K}{2}|\xi - \hat{\xi}|$, luego $|g(t,\lambda)| \leq e^{\gamma|t|}\frac{3K}{2}|\lambda|$, de donde:

$$
\begin{aligned}
|h(t,\lambda)| &= |g(t,\lambda)| \cdot ||Df|| \\
&\leq e^{\gamma|t|}\frac{3K}{2}|\lambda| \cdot ||Df|| \\
\Rightarrow e^{-\gamma|t|}|h(t,\lambda)| &\leq \delta_0 \frac{3K}{2}|\lambda| \\
\Rightarrow ||h(\cdot,\lambda)||_{\gamma+\sigma} &\leq ||h(\cdot,\lambda)||_{\gamma} \\
&\leq \delta_0 \frac{3K}{2}|\lambda|
\end{aligned}
$$

8. Luego aplicando límite sobre expresión de g como ecuación integral obtenemos:

$$
\begin{aligned}
g(t,\lambda) &= e^{At}\eta + G(h(\cdot,\lambda))(t) \\
\lim_{\lambda\to 0}(g(t,\lambda))_{\gamma+\sigma} &= \lim_{\lambda\to 0}(e^{At}\eta + G(h(\cdot,\lambda))(t))_{\gamma+\sigma} \\
&= e^{At}\eta + \lim_{\lambda\to 0}(G(h(\cdot,\lambda))(t))_{\gamma+\sigma}
\end{aligned}
$$

9. Queremos que $\Lambda(\xi)\eta(t) = v(t)\eta = D\theta(\xi)\eta(t)$ sea solución de (B), luego basta probar que:

$$
\lim_{\lambda\to 0}(G(h(\cdot,\lambda))(t))_{\gamma+\sigma} = G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot))
$$

Es decir, que:

$$
||G(h(\cdot,\lambda)) - G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot))||_{\gamma+\sigma} \overset{\lambda\to 0}{\to} 0
$$

10. El interior del argumento de G que buscamos limitar puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta(t) &= Df(x^*(t,\xi))D_\xi x^*(t,\xi)\eta \\
&= D_\xi(f\circ x^*)(t,\xi)\eta \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\circ x^*(t,\xi+\lambda\eta) - f\circ x^*(t,\xi)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} h(t,\lambda) \\
&=: h(t,0)
\end{aligned}
$$

Definiendo extensión continua en $\lambda = 0$

11. Ahora bien, h cumple condiciones de Lema anterior, luego se cumple la continuidad de G en parámetro espacial de λ sobre h, es decir:

$$\lim_{\lambda\to 0} ||G(h(\cdot,\lambda)) - G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot))||_{\gamma+\sigma} = \lim_{\lambda\to 0} ||G(h(\cdot,\lambda)) - G(h(t,0))||_{\gamma+\sigma} = 0$$

De donde se cumple el Lema

□

Lema 1.31 (La cota de la derivada permite extensión de decaímento/crecimiento)**.** *Supongamos que $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe un número $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ tal que si $||Df|| < \delta_1$, entonces $\Lambda : E_c \to L(E_c; C_{\gamma+3\sigma})$ continua en $\xi \in E_c$*

Demostración.

1. Usaremos que $D_\xi x^*(\cdot,\xi)$ es solución de (B) y que $G : C_{\gamma+2\sigma} \to C_{\gamma+3\sigma}$ (pues podemos tomar $\gamma' = \gamma+\sigma$ y el dominio y conjunto de salida se transladan)

2. Dado $\eta \in E_c$ arbitrario, tenemos:

$$\begin{aligned}
||\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})||_{\gamma+3\sigma} =& \left|\left|(D_\xi x^*(\cdot,\xi) - D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi}))\eta\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \\
=& \left|\left|G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi))D_\xi x^*(\cdot,\xi)\eta - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi})\eta\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \\
\leq& \left|\left|G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi))(D_\xi x^*(\cdot,\xi) - D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi}))\eta\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \\
&+ \left|\left|G\Big((Df(x^*(\cdot,\xi)) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi})))D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi})\eta\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \\
=& \left|\left|G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi))(\Lambda(\xi)\eta(\cdot) - \Lambda(\hat{\xi})\eta(\cdot))\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \\
&+ \left|\left|G\Big((Df(x^*(\cdot,\xi)) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi})))\Lambda(\xi)\eta(\cdot)\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma}
\end{aligned}$$

3. De forma análoga que la cota de G_c en el Lema para $\mathrm{Lip}(f) < \delta_0$ (basta obtener la expresión de diferencia de f como la integral de la derivada y obtenemos la cota de la derivada en vez de Lipschitz, luego elegimos valor suficientemente pequeño como para anular los coeficientes que no nos interesen) , podemos encontrar δ_1 tal que, si $||Df|| < \delta_1$, entonces:

$$\left|\left|G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi))(\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi}))\eta\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \leq \frac{1}{3}\left|\left|\Big(\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})\Big)\eta\right|\right|_{\gamma+3\sigma}$$

4. Recordemos que $Df(x^*(t,\xi))$ es continua en $(t,\xi) \in \mathbb{R}\times E_c$.

   Además:

$$||D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi})||_{\gamma+2\sigma} \leq \frac{3K}{2}|\eta|$$

5. Para acotar el segundo miembro de la desigualdad de diferencias de Λ, aprovechamos el mismo argumento que en los Lemas anteriores para obtener $\mu > 0$ tal que:

$$|\xi - \hat{\xi}| \leq \mu \Rightarrow \left|\left|G\Big((Df(x^*(\cdot,\xi)) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi})))D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi})\eta\Big)\right|\right|_{\gamma+3\sigma} \leq \epsilon|\eta|$$

   En efecto, la condición (ii) del Lema sobre la continuidad es inmediata por $||Df|| < \delta_1$ y $|D_\xi x^*(\cdot,\hat{\xi})\eta| \leq \frac{3K}{2}|\eta|$ luego el argumento de G es acotado, por lo tanto el argumento para la parte no compacta es idéntico al del Lema anterior.

6. Para la parte compacta basta tomar la cota de la diferencia en los argumentos espaciales para obtener un argumento sobre la cota general. Es decir:

$$\begin{aligned} |\xi - \hat{\xi}| < \mu &\Rightarrow |x^*(\cdot,\xi) - x^*(\cdot,\hat{\xi})| < \epsilon_1 \\ &\Rightarrow |Df(x^*(\cdot,\xi)) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))| < \epsilon_2 \end{aligned}$$

   Luego controlando ϵ_2 obtenemos la cota como en Lema anterior.

7. Volviendo a la desigualdad original:

$$\begin{aligned} ||\Lambda(\xi)\eta - \Lambda(\hat{\xi})\eta||_{\gamma+3\sigma} &\leq \frac{1}{3}||\Lambda(\xi)\eta - \Lambda(\hat{\xi})\eta||_{\gamma+3\sigma} + \epsilon|\eta| \\ \Rightarrow ||(\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi}))\eta||_{\gamma+3\sigma} &\leq \frac{3}{2}\epsilon|\eta| \\ \Rightarrow ||\Lambda(\xi) - \Lambda(\hat{\xi})||_{L(E_c;C_{\gamma+3\sigma})} &\leq \frac{3}{2}\epsilon \end{aligned}$$

   Para $|\xi - \hat{\xi}| < \mu$

$\square$

Lema 1.32 (Suavidad de Variedad Central Global para $k = 1$)**.** *Supongamos que $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$,$Df(0) = 0$ y que $||Df|| < \delta_1$ es dado por el Lema anterior.*

Entonces el $\phi : E_c \to E_h = E_u \oplus E_s$ función que caracteriza a la variedad central verifica:

1. $\phi \in C_b^1(E_c; E_h)$
2. $\phi(0) = 0$
3. $D\phi(0) = 0$
4. $\mathrm{Lip}(\phi) < 1$

Además, si $\hat{x} \in W^c$ y $\widehat{x}_c(t) = \pi_c\varphi_X^t(\hat{x})$ entonces $\widehat{x}_c(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{x}_c = A\dot{x}_c + \pi_c f(x_c + \phi(x_c))$$

donde $x_c \in E_c$

Demostración.

1. Del Lema anterior, tenemos que:

$$D\theta \in C^0(E_c, \mathcal{L}(E_c, C_{\gamma+3\sigma}))$$

Además, tenemos la condición de la solución como función de la posición inicial siendo Lipschitz según:

$$|x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})| \leq e^{\gamma|t|}\frac{3K}{2}|\xi - \hat{\xi}|$$

para cualesquiera $\gamma \in (\alpha, \beta); \xi, \hat{\xi} \in E_c; t \in \mathbb{R}$

2. Por las condiciones dadas en el ítem anterior:

$$\forall \xi, \eta \in E_c, \tau \in \mathbb{R}, |D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta| \leq \frac{3K}{2}e^{\gamma|\tau|}|\eta| \leq \frac{3K}{2}e^{(\gamma+3\sigma)|\tau|}|\eta|$$

Aplicando el control de crecimiento/decaímiento de las curvas solución de la parte lineal sobre el espacio inestable:

$$\begin{aligned}
\left| - \int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau \right| &\leq \int_0^\infty \left|e^{-A\tau}\pi_u\right| \cdot \left|Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta\right| d\tau \\
&\leq \int_0^\infty Ke^{\beta(-\tau)}\left|Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta\right| d\tau \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\beta\tau}\delta_1\left|D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta\right| d\tau \\
&\leq \frac{3K^2\delta_1}{2}|\eta| \int_0^\infty e^{-\beta\tau+(\gamma+3\sigma)\tau} d\tau \\
&= \frac{3K^2\delta_1}{2}|\eta| \left(\frac{e^{((\gamma+3\sigma)-\beta)\tau}}{(\gamma+3\sigma)-\beta}\right)\Big|_0^\infty \\
&= \frac{3K^2\delta_1|\eta|}{2(\beta-(\gamma+3\sigma))}
\end{aligned}$$

3. De manera análoga, para cada $\eta \in E_c, \xi \in E_c$ tenemos:

$$\left|\int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau\right| \leq \frac{3K^2\delta_1|\eta|}{2(\beta-(\gamma+3\sigma))}$$

4. Podemos tomar la definición de ϕ a partir de su forma integral:

$$\phi(\xi) = -\int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u f(x^*(\tau,\xi))d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s f(x^*(\tau,\xi))d\tau$$

Para luego derivarlo y obtener la identidad:

$$D\phi(\xi)\eta = -\int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau$$

5. Por la convergencia uniforme de las integrales de arriba con respecto de $\xi \in E_c$ y la continuidad de $Df, x^*(\cdot,\xi), D_\xi x^*(\cdot,\xi)$ tenemos que $D\phi$ es continua.

6. Por las desigualdades anteriores, tenemos que $D\phi(\xi)$ es acotada por $\frac{3K^2\delta_1|\eta|}{\beta-(\gamma+3\sigma)}$:

   Por tanto, la aplicación cumple $\phi \in C_b^1(E_c, E_h)$

7. La unicidad de soluciones resulta en:

$$x^*(t,0) = \varphi_X^t(x^*(0,0)) = \varphi_X^t(0) = 0$$

   Luego por definición de ϕ y caracterización de su derivada $D\phi$:

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 0 + \phi(0) = x^*(t,0) = 0 \\
D\phi(0)\eta &= -\int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u Df(x^*(\tau,0))D_\xi x^*(\tau,0)\eta d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s Df(x^*(\tau,0))D_\xi x^*(\tau,0)\eta d\tau \\
&= -\int_0^\infty e^{-A\tau}\pi_u Df(0)D_\xi x^*(\tau,0)\eta d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau}\pi_s Df(0)D_\xi x^*(\tau,0)\eta d\tau \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Donde lo último viene dado del hecho de que $Df(0) = 0$. También pudimos haber usado la definición de ϕ como forma integral en lugar de como perturbación y el resultado es análogo por $f(0) = 0$. En ambos casos se cumple:

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 0 \\
D\phi(0)\eta &= 0
\end{aligned}$$

8. Para δ_1 suficientemente pequeño tenemos:

$$\mathrm{Lip}(\phi) < 1$$

9. Sea $\hat{x} \in W^c$, tomaremos:

$$\varphi_X^t(\hat{x}) = \xi(t) + \phi(\xi(t))$$

   donde $\xi : I \subseteq \mathbb{R} \to E_c$ curva.

   Entonces:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} + \mathrm{D}\phi(\xi(\mathrm{t})))\dot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt}\varphi_X^t(\hat{x}) \\
&= A\varphi_X^t(\hat{x}) + f(\varphi_X^t(\hat{x})) \\
&= A\xi(t) + A\phi(\xi(t)) + f(\xi(t) + \phi(\xi(t)))
\end{aligned}$$

   Aplicando π_c:

$$\dot{\xi}(t) = \pi_c(\mathrm{Id} + \mathrm{D}\phi(\xi(\mathrm{t})))\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \pi_c f(\xi(t) + \phi(\xi(t)))$$

debido a $\phi : E_c \to E_h$ y $D\phi : TE_c = E_c \to TE_h = E_h$

Luego se satisface la ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{\xi} = A\xi + \pi_c f(\xi + \phi(\xi))$$

□

Comentario 1.33. En la última parte de la prueba debemos recordar que A está en su forma canónica de Jordan y por tanto $A : \xi(t) \in E_c \mapsto A\xi(t) \in E_c$

Teorema 1.34 (Suavidad de la Variedad Central Global)**.** *Supongamos que $f \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ para algún $k \geq 1$, que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$.*

Etnonces existe un número $\delta_k > 0$ tal que si $||Df|| < \delta_k$, entonces:

1. *$\phi \in C_b^k(E_c; E_h)$, donde ϕ función que caracteriza la variedad central global*
2. *$\phi(0) = 0$*
3. *$D\phi(0) = 0$*
4. *$\mathrm{Lip}(\phi) < 1$*

Además, si $\hat{x} \in W^c$ y $\widehat{x}_c(t) = \pi_c \widehat{x}(t, \hat{x})$ entonces $\widehat{x}_c(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{x}_c = Ax_c + \pi_c f(x_c + \phi(x_c))$$

donde $x_c \in E_c$

Demostración. 1. Del Lema anterior, tenemos el caso $k = 1$

2. Probaremos el caso $k = 2$:
   (a) Sabemos que $\alpha < \gamma < k\gamma < \beta$ por Lema inicial, y supongamos que $\sigma > 0$ es suficientemente pequeño.
   (b) Supongamos, además, que $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $D\theta \in C^0(E_c; \mathcal{L}(E_c; C_{\gamma+3\sigma}))$
   (c) Afirmamos que $D\theta$ es diferenciable y que la segunda derivada es continua
      i. Definamos la función:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} \times E_c \times E_c \times E_c &\to \mathbb{R}^n \\ (t, \xi, \hat{\xi}, \eta) &\mapsto v(t, \xi, \hat{\xi}, \eta) = D\theta(\xi)\eta(t) - D\theta(\hat{\xi})\eta(t) \end{aligned}$$

Asimismo definamos el dominio:

$$\hat{D} := \{u \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) : (\exists \xi, \hat{\xi}, \eta : u(\cdot) = v(\cdot, \xi, \hat{\xi}, \eta))\}$$

Con este dominio definimos la función:

$$\begin{aligned} L : \mathrm{Dom}(L) \subseteq \hat{D} \times E_c \times E_c \times E_c &\to \mathbb{R}^n \\ (v(\cdot, \xi, \hat{\xi}, \eta), \xi, \hat{\xi}, \eta) &\mapsto L(v, \xi, \hat{\xi}, \eta) = G(Df(x^*(\cdot, \hat{\xi}))v(\cdot, \xi, \hat{\xi}, \eta)) \end{aligned}$$

ii. Desarrollamos las funciones de forma análoga para obtener:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} - L_{\xi,\hat{\xi},\eta})v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) &= v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta))(t) \\
&= D\theta(\xi)\eta(t) - D\theta(\hat{\xi})\eta(t) - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta))(t) \\
&= e^{At}\eta + G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot))(t) \\
&\qquad - e^{At}\eta - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(\cdot))(t) \\
&\qquad - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta))(t) \\
&= G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(\cdot))(t) \\
&\qquad - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta))(t) \\
&= G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(\cdot))(t) \\
&\qquad - G(Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta))(t) \\
&= G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta(\cdot) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(\cdot) \\
&\qquad - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi}))v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta)\Big)(t)
\end{aligned}$$

iii. Definimos la función:

$$\begin{aligned}
h : \mathbb{R} \times E_c \times E_c \times E_c &\to \mathbb{R}^n \\
(t,\xi,\hat{\xi},\eta) &\mapsto Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))v(t,\xi,\hat{\xi},\eta)
\end{aligned}$$

La cual también admite la forma:

$$\begin{aligned}
h(t,\xi,\hat{\xi}\eta) &= Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) \\
&= Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))D\theta(\hat{\xi})\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))[D\theta(\xi)\eta(t) - D\theta(\hat{\xi})\eta(t)] \\
&= Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta(t) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))D\theta(\xi)\eta(t) \\
&= [Df(x^*(t,\xi)) - Df(x^*(t,\hat{\xi}))]D\theta(\xi)\eta(t) \\
&= \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi) + (1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))\Big(x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})\Big)\Big(D\theta(\xi)\eta(t)\Big)d\mu \\
&= \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi) + (1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu\Big(x^*(t,\xi) - x^*(t,\hat{\xi})\Big)\Big(D\theta(\xi)\eta(t)\Big) \\
&= \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi) + (1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t,\omega\xi + (1-\omega)\hat{\xi})d\omega[\xi - \hat{\xi}]\Big)\Big(D\theta(\xi)\eta(t)\Big) \\
&= \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi) + (1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu\Big(D\theta(\xi)\eta(t)\Big)\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t,\omega\xi + (1-\omega)\hat{\xi})d\omega[\xi - \hat{\xi}]\Big)
\end{aligned}$$

iv. Definimos la función que induce formas bilineales:

$$
\begin{aligned}
B : \mathbb{R} \times E_c \times E_c \times E_c \times E_c &\to \mathbb{R}^n \\
(t, \xi, \hat{\xi}, a, b) &\mapsto \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi) + (1-\mu) x^*(t,\hat{\xi})) d\mu \Big(D\theta(\xi) a(t) \Big) \\
&\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t, \omega\xi + (1-\omega)\hat{\xi}) d\omega b \Big)
\end{aligned}
$$

La forma bilineal viene dada por $B_{t,\xi,\hat{\xi}}(\cdot,\cdot) = B(t,\xi,\hat{\xi},\cdot,\cdot)$

v. De donde obtenemos la expresión:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id} - L_{\xi,\hat{\xi},\eta}) v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) &= G\Big(Df(x^*(\cdot,\xi)) D\theta(\xi)\eta(\cdot) - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi})) D\theta(\hat{\xi})\eta(\cdot) \\
&\quad - Df(x^*(\cdot,\hat{\xi})) v(\cdot,\xi,\hat{\xi},\eta) \Big)(t) \\
&= G\Big(h(\cdot,\xi,\hat{\xi}) \Big)(t)
\end{aligned}
$$

Asimismo:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id} - L_{\xi,\hat{\xi},\eta}) v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) &= G\Big(h(\cdot,\xi,\hat{\xi}) \Big)(t) \\
&= G\Big(B(\cdot,\xi,\hat{\xi}) \eta(\xi - \hat{\xi}) \Big)(t)
\end{aligned}
$$

Lo que puede reescribirse como:

$$
(\mathrm{Id} - L_{\xi,\hat{\xi},\eta}) v(t,\xi,\hat{\xi},\eta) = G\Big(B(\cdot,\hat{\xi},\hat{\xi}) \eta(\xi - \hat{\xi}) \Big)(t) + G\Big([B(\cdot,\hat{\xi},\hat{\xi}) - B(\cdot,\hat{\xi},\hat{\xi})] \eta(\xi - \hat{\xi}) \Big)(t)
$$

vi. Buscamos aplicar el Lema con respecto del límite en 0, con lo que buscamos cumplir condiciones análogas a aquellas presentadas en el Lema anterior (donde usamos el operador inverso).

A. El operador bilineal:

$$
\begin{aligned}
G\Big(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})(\cdot)(\cdot) \Big) : E_c \times E_c &\to C_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma} \\
(a,b) &\mapsto G\Big(B(\cdot,\xi,\hat{\xi}) ab \Big)
\end{aligned}
$$

es operador bilineal acotado, a fin de que se cumpla el rol del operador L del Lema anterior.

B. Para ver esto basta evaluar en 2 valores arbitrarios $\eta_1, \eta_2 \in E_c$:

$$B(t,\xi,\hat{\xi})\eta_1\eta_2 = \int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi)+(1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu$$
$$\Big(D\theta(\xi)a(t)\Big)\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t,\omega\xi+(1-\omega)\hat{\xi})d\omega b\Big)$$
$$\Rightarrow ||G\Big(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})\eta_1\eta_2\Big)||_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma} = \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(2(\gamma+3\sigma)+\sigma)t}||G\Big(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})\eta_1\eta_2\Big)(t)||$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(2(\gamma+3\sigma)+\sigma)t}||G\Big(\int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi)+(1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu$$
$$\Big(D\theta(\xi)\eta_1(t)\Big)\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t,\omega\xi+(1-\omega)\hat{\xi})d\omega\eta_2\Big)\Big)(t)||$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(2(\gamma+3\sigma)+\sigma)t}||G_{c+u+s}\Big(\int_0^1 D^2 f(\mu x^*(t,\xi)+(1-\mu)x^*(t,\hat{\xi}))d\mu$$
$$\Big(D\theta(\xi)\eta_1(t)\Big)\Big(\int_0^1 D_\xi x^*(t,\omega\xi+(1-\omega)\hat{\xi})d\omega\eta_2\Big)\Big)(t)||$$
$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(2(\gamma+3\sigma)+\sigma)t}||e^{-\alpha t}||f||_{C^2}$$
$$||e^{-(\gamma+2\sigma)t}\frac{3K}{2}||^2\cdot|\eta_1|\cdot|\eta_2|\Big(\frac{1}{2(\gamma+3\sigma)-\alpha}+\frac{2}{\beta-2(\gamma+3\sigma)}\Big)$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\sigma t}||f||_{C^2}\Big(\frac{1}{2(\gamma+3\sigma)-\alpha}+\frac{2}{\beta-2(\gamma+3\sigma)}\Big)$$
$$\frac{9K^2}{4}|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-\sigma t}||f||_{C^2}\Big(\frac{1}{2(\gamma+3\sigma)-\alpha}+\frac{2}{\beta-2(\gamma+3\sigma)}\Big)$$
$$\frac{9K^2}{4}|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} e^{-(2(\gamma+3\sigma)+\sigma)t}||f||_{C^2}\Big(\frac{1}{2(\gamma+3\sigma)-\alpha}+\frac{2}{\beta-2(\gamma+3\sigma)}\Big)$$
$$\Big(\frac{3K}{2}\Big)^2 e^{2(\gamma+3\sigma)t}|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$
$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} ||f||_{C^2}\Big(\frac{1}{2(\gamma+3\sigma)-\alpha}+\frac{2}{\beta-2(\gamma+3\sigma)}\Big)$$
$$\Big(\frac{3K}{2}\Big)^2|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$
$$= M|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$

C. En efecto, recordemos la cota sobre $D\theta(\hat{\xi})\eta$:

$$||D\theta(\hat{\xi})\eta||_{\gamma+2\sigma} \leq \frac{3K}{2}|\eta$$

y aprovechando que la desigualdad con la norma de la segunda derivada aplica con respecto de los 2 argumentos, de donde se obtiene el valor al cuadrado.

D. De todo el argumento anterior se obtiene la cota para la forma bilineal deseada:

$$||G\left(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})\eta_1\eta_2\right)||_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma} \leq M|\eta_1|\cdot|\eta_2|$$

E. Además, buscamos que G converja al 0 según:

$$\lim_{|\xi-\hat{\xi}|}||G\left(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})(\cdot)(\cdot)\right)-G\left(B(\cdot,\xi,\hat{\xi})(\cdot)(\cdot)\right)||_{\mathrm{Mult}^2(E_c;C_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma})}=0$$

Esto, a fin de que cumpla el rol del operador N del Lema anterior.

F. Por la linealidad de G tenemos:

$$||G\left([B(\cdot,\xi,\hat{\xi})-B(\cdot,\xi,\hat{\xi})](\cdot)(\cdot)\right)||_{\mathrm{Mult}^2(E_c;C_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma})}$$

G. Basta tomar la desigualdad como en Lema anterior:

$$\begin{aligned}
||G\left([B(\cdot,\xi,\hat{\xi})-B(\cdot,\xi,\hat{\xi})](\cdot)(\cdot)\right)||_{\mathrm{Mult}^2(E_c;C_{2(\gamma+3\sigma)+\sigma})} &\leq K|\int e^{\tau\cdots}|[B(\tau,\xi,\hat{\xi})-B(\tau,\xi,\hat{\xi})](\cdot)(\cdot)|d\tau| \\
&\leq K|\int e^{\tau\cdots}[||B(\tau,\xi,\hat{\xi})||+||B(\tau,\xi,\hat{\xi})||]d\tau| \\
&\leq K|\int e^{\tau\cdots}2||B(\tau,\xi,\hat{\xi})||d\tau| \\
&\leq KK_0||f||_{C^2}\frac{9K^2}{4}|\xi-\hat{\xi}|
\end{aligned}$$

La demostración del texto utiliza la función h definida anteriormente, pero esta función usa 2 argumentos vectoriales en la expresión, mientras que fue definida tan sólo como una diferencia de imágenes de f, los cuales son vectores.

vii. Argumentando como en ese Lema, basta tomar la inversa como serie de Von Neumann y considerar que la diferencia dada por v tiene a lo menos orden lineal, luego es diferenciable

viii. Obtenemos que como en Lema anterior podemos tomar la forma:

$$\hat{g}(t,\lambda)=\frac{D_\xi x^*(t,\xi+\lambda\eta_2)\eta_1-D_\xi x^*(t,\xi)\eta_1}{\lambda}$$

Luego se tiene (por definición de derivada):

$$\lim_{\lambda\to 0}\hat{g}(t,\lambda)=D_\xi^2 x^*(t,\xi)\eta_1\eta_2$$

Por ecuación integral B se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t,\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\Bigg(D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1(t) - D\theta(\xi)\eta_1(t)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}\Bigg(e^{At}\eta_1 + G(Df(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta_2))D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1)(t) \\
&\qquad - e^{At}\eta_1 - G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta_1)(t)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}\Bigg(G(Df(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta_2))D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1)(t) - G(Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta_1)(t)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}G(Df(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta_2))D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1 - Df(x^*(\cdot,\xi))D\theta(\xi)\eta_1)(t)
\end{aligned}$$

Luego podemos escribir el argumento de la forma:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(t,\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\Bigg(Df(x^*(t,\xi+\lambda\eta_2))D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1(t) - Df(x^*(t,\xi))D\theta(\xi)\eta_1(t)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\lambda}\Bigg(Df(x^*(t,\xi+\lambda\eta_2))[D\theta(\xi+\lambda\eta_2)\eta_1(t) - D\theta(\xi)\eta_1(t)] \\
&\qquad + [Df(x^*(t,\xi+\lambda\eta_2)) - Df(x^*(t,\xi))]D\theta(\xi)\eta_1\Bigg) \\
&= Df(x^*(t,\xi+\lambda\eta_2))\hat{g}(t,\lambda) + h(t,\xi+\lambda\eta_2,\xi,\eta_1)
\end{aligned}$$

ix. Tomando límites podemos obtener la forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} G(\hat{h}(\cdot,\lambda)) &= \lim_{\lambda\to 0} G(Df(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta_2))\hat{g}(\cdot,\lambda)) + G(h(\cdot,\xi+\lambda\eta_2,\xi,\eta_1)) \\
&= G(\lim_{\lambda\to 0} Df(x^*(\cdot,\xi+\lambda\eta_2))\hat{g}(\cdot,\lambda) + h(\cdot,\xi+\lambda\eta_2,\xi,\eta_1)) \\
&= G(Df(x^*(\cdot,\xi))D^2_\xi x^*(t,\xi)\eta_1\eta_2 + H_1(\cdot,\xi,\eta_1))
\end{aligned}$$

Por Lema anterior, sabemos que H_1 continuo implica que:

$$\lim_{|\xi-\hat{\xi}|\to 0} ||G\Bigg(H_1(\cdot,\xi) - H_1(\cdot,\hat{\xi})\Bigg)||_{2(\gamma+3\sigma)+3\sigma} = 0$$

x. De donde obtenemos un valor de cota para la derivada de forma que de ser satisfecho, la definición de $g(t,\lambda)$ dada como en dicho Lema nos garantiza continuidad de Λ_1 definido de forma análoga a Λ. Esto es, la continuidad de la derivada se obtiene tras obtener la expresión como ecuación integral y aprovechando el hecho de que para $\delta_2 < \delta_1$ se pueden aplicar las desigualdades para acotar el valor que no involucra al H_1.

(d) Por el ítem anterior, podemos probar la segunda diferenciabilidad de la perturbación. En efecto, basta tomar la forma dada por la primera derivada y volver a derivar:

$$
\begin{aligned}
D\phi(\xi)\eta &= -\int_0^{\infty} e^{-A\tau}\pi_u Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{0} e^{-A\tau}\pi_s Df(x^*(\tau,\xi))D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta d\tau \\
D^2\phi(\xi)[\eta_1,\eta_2] &= -\int_0^{\infty} e^{-A\tau}\pi_u \Big[D^2 f(x^*(\tau,\xi))[D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta_2, D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta_1] \\
&\qquad + Df(x^*(\tau,\xi))D^2_{\xi\xi}x^*(\tau,\xi)[\eta_2,\eta_1]\Big] d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{0} e^{-A\tau}\pi_s \Big[D^2 f(x^*(\tau,\xi))[D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta_2, D_\xi x^*(\tau,\xi)\eta_1] \\
&\qquad + Df(x^*(\tau,\xi))D^2_{\xi\xi}x^*(\tau,\xi)[\eta_2,\eta_1]\Big] d\tau
\end{aligned}
$$

Por la continuidad y cota de los argumentos se tiene que $\phi \in C_b^2(E_c, E_h)$.

3. Probamos para $k = j \geq 2$. Supondremos el caso j:

   (a) Se tiene la existencia de la derivada $j-$esima de la curva solucion:

   $$\exists D_\xi^j x^*(t,\xi) : E_c \to \mathcal{L}(E_c^j; C_{j(\gamma+3\sigma)+(j-2)3\sigma+\sigma})$$

   ademas, se verifica la ecuacion:

   $$D_\xi^j x^*(t,\xi) = G(Df(x^*(\cdot,\xi))D_\xi^j x^*(\cdot,\xi)(\eta_1 \ldots \eta_j) + H_{j-1}(\cdot,\xi))(t)$$

   (b) Por construcción de $\delta_j < \delta_{j-1}$ podemos hacer lo mismo para obtener que si $||Df|| < \delta_j$ entonces $D_\xi^j x^*(t,\xi)$ es continua en $\xi \in E_c$.

   (c) Con esto, podemos probar la $j-$ésima diferenciabilidad de la perturbación $\phi \in C_b^j(E_c, E_h)$.

□

1.2 Sobre la Suavidad según contracción de Fibras

Desde el 15 al 27

1.3 Variedad Central Local

Definición 1.35 (Funciones corte)**.** Una funcion corte es una función $\S \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que:

1. Su rango sea entre $[0, 1]$:

$$0 \leq \S(z) \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}^n$$

2. La bola unitaria este en su soporte:

$$\S(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |z| \geq 2 \end{cases}$$

A cada corte y a cada funcion $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ se le asocia la función $\rho-$corte definida por:

$$f_\rho(z) := f(z)\S\left(\frac{z}{\rho}\right), \forall z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0$$

Lema 1.36 (Corte suave)**.** *Sea* $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *con* $k \geq 1$ *parte no lineal del campo* $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. Entonces el* $\rho-$*corte para* $\rho > 0$ *es suave* $f_\rho \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ *y se cumple:*

$$\lim_{\rho \to 0} ||Df_\rho|| = 0$$

Demostración. 1. Basta ver que la definicion de f_ρ nos permite obtener la suavidad debido a la suavidad de f y de $\S$. Debido a la continuidad de cada derivada y al hecho de que el soporte sea un compacto, se tiene que cada derivada es acotada, luego $f_\rho \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Derivando en la definicion se tiene:

$$Df_\rho(x) = Df(x)\S\left(\frac{x}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}f(x)D\S\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

$$||Df_\rho|| \leq \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)| + \frac{1}{\rho}||D\S|| \sup_{|x| \leq 2\rho} |f(x)|$$

Podemos expresar f en su forma integral (debido al Teorema del Valor Medio) para acotar la parte derecha del sumando:

$$\sup_{|x| \leq 2\rho} |f(x)| = \sup_{|x| \leq 2\rho} |\int_0^1 Df(sx)xds| \leq 2\rho \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)|$$

Se sustituye la ultima desigualdad para obtener:

$$||Df_\rho|| \leq \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)| + \frac{1}{\rho}||D\S|| \cdot 2\rho \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)| = (1 + 2||D\S||) \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)|$$

Tomando líimite cuando $\rho \to 0$ se obtiene el resultado deseado:

$$||Df_\rho|| \leq (1 + 2||D\S||) \lim_{\rho \to 0} \sup_{|x| \leq 2\rho} |Df(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{\rho \to 0} ||Df_\rho|| = 0$$

□

Definición 1.37 (Conjunto localmente invariante bajo el flujo)**.** Decimos que un conjunto M es localmente invariante bajo el flujo (asociado a un campo) en un punto p si:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}^n})}(p) : \left(\forall x \in M \cap V, \forall t \in I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V); \varphi^t_X(x) \in M\right)$$

En otras palabras, que hay una vecindad V para la cuál las órbitas que se quedan en la vecindad ($I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V)$) también se quedan en M. O lo que es lo mismo:

$$\exists V \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}^n})}(p) : \varphi_X^{I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V)}(M \cap V) \subseteq M$$

Definición 1.38 (Órbitas Completas)**.** Decimos que una órbita es completa si el intervalo maximal asociado a cualquier punto (y por tanto, a todos) en un conjunto es $\mathbb{R}$. Es decir, si $I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V) = \mathbb{R}$

Teorema 1.39 (Variedad Central Local)**.** *Sea $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$ parte no lineal. Entonces existe una función de perturbación $\psi \in C^k_b(E_c; E_h)$ y una vecindad abierta del origen V verificando:*

1. *Que la variedad:*

$$W^c_{loc} := \{\xi + \psi(\xi) : \xi \in E_c\} = (\mathrm{Id} + \psi)(E_c)$$

es localmente invariante bajo el flujo del campo con respecto de la vecindad V.

2. *Las condiciones de la perturbación ψ:*

$$\psi(0) = 0$$
$$D\psi(0) = 0$$

3. *Las órbitas completas y acotadas dentro de V están en W^c_{loc}. Lo que es lo mismo:*

$$I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V) = \mathbb{R} \Rightarrow x \in W^c_{loc}$$

Demostración.

1. Sea δ_k dado del Teorema de Suavidad de la Variedad Central. Sea $\rho > 0$ tal que el $\rho-$corte f_ρ de f verifique que $||Df_\rho|| < \delta_k$.

2. Por el Teorema de Variedad Central existe una función de perturbación $\phi_\rho \in C^k_b(E_c; E_h)$ asociada al campo con parte no lineal f_ρ.

3. Sabemos que la funcion de corte verifica que:

$$f(x) = f_\rho(x) \forall x \in \Omega := B_\rho(x)$$

Con esto se verifica que la variedad es localmente invariante. En efecto, la variedad central global inducida es invariante, luego la interseccion con el abierto es invariante y coincide con el flujo del campo original en dicho abierto.

4. Las segunda condicion se verifica de las propiedades de la funcion perturbacion.

5. Supongamos que $x \in \Omega$ punto cuya orbita es completa y acotada en Ω. Entonces, la orbita de x con respecto del campo con parte no lineal f_ρ es completa y acotada, luego x pertenece a la variedad central global asociada a f_ρ. En efecto, se verifica que:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi^t_{X_\rho}(x)| < \infty \Rightarrow x \in W^c_{loc}$$

Lo que es el resultado

□

Definición 1.40 (Variedad Central Local)**.** Sea $\phi \in C^k_b(E_c; E_h)$ una función de verificando $\phi(0) = 0$ y $D\phi(0) = 0$. Si la perturbacion del espacio central dada por dicha funcion es localmente invariante bajo el flujo del campo vectorial X en una vecindad V del origen, entonces la variedad se dice una C^k variedad central local del campo.

Corolario 1.41 (Existencia de la Variedad Central Local)**.** *Sea $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^k con $k \geq 1$ y sea p un punto de equilibrio. Entonces existe una variedad central local W^c_{loc} en una vecindad V de p.*

Proof. Se sigue del Teorema anterior. □

Lema 1.42 (Caracterización de la Variedad Central Local)**.** *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con $f(0) = 0$ y $Df(0) = 0$ y $\phi \in C^1_b(E_c; E_h)$ una función verificando $\phi(0) = 0$ y $D\phi(0) = 0$. Entonces, la variedad central local asociada a f es:*

$$W^c_{loc} = \{\xi + \phi(\xi) : \xi \in E_c\}$$

si solo si existe una vecindad del origen $\Omega_c \subseteq E_c$ (bajo la topología relativa a la identificación de E_c como espacio Euclideo) tal que para todo $\xi \in \Omega_c$ se cumple:

$$D\phi(\xi)\pi_c\Big[A\xi + f(\xi + \phi(\xi))\Big] = \pi_h\Big[A\phi(\xi) + f(\xi + \phi(\xi))\Big]$$

O lo que es lo mismo:

$$D\phi(\xi)\pi_c X(\xi + \phi(\xi)) = \pi_h X(\xi + \phi(\xi))$$

Demostración. 1. ($\Rightarrow$)Supongamos que exista dicha vecindad Ω_c del origen sobre la cual se verifique la ecuación. Entonces:

(a) Se descompone el campo vectorial en el espacio central y en el espacio hiperbólico:

$$X_c(x) := \pi_c \circ X(x + \phi(x))$$
$$X_h(x) := \pi_h \circ X(x + \phi(x))$$

(b) $\varphi^t_{X_c}(\xi) \subseteq \Omega_c$ para $|t|$ suficientemente pequeño. En efecto, sabemos que el campo X_c toma los valores según:

$$X_c : \Omega_c \subseteq E_c \to W^c_{loc} \to \mathbb{R}^n \to E_c$$

De donde es un campo vectorial sobre el abierto $\Omega_c \subseteq E_c$. Por lo tanto, se cumple que las curvas solución $\varphi^t_{X_c}(\xi)$ quedan contenidas en E_c. Tomando $|t|$ en un intervalo del abierto $\varphi^{-1}_{X_c,\xi}(\Omega_c)$ se garantiza dicha invarianza.

(c) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi))) &= X_c(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))\\ &\quad + D\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))X_c(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))\\ &= [\mathrm{Id}+D\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))]X_c(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))\\ &= (\pi_c+\pi_h)X(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))\\ &= X(\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi)))\end{aligned}$$

Tomando el P.V.I.:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=X(x(t))\\ x(0)=\xi+\phi(\xi)\end{cases}$$

se obtiene (por existencia y unicidad):

$$\varphi^t_X(\xi+\phi(\xi))=\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi))$$

Luego el conjunto W^c_{loc} asociado a ϕ es localmente invariante bajo el flujo. En efecto, aplicar el flujo a cualquier punto del conjunto es lo mismo que aplicarlo sobre $\varphi^t_X(\xi)$, por propiedad aditiva se sigue que todavía es de dicha forma, por tanto, es invariante:

$$\begin{aligned}\xi+\phi(\xi)\in W^c_{loc} &\Rightarrow \varphi^t_X(\xi+\phi(\xi))=\varphi^t_{X_c}(\xi)+\phi(\varphi^t_{X_c}(\xi))\in E_c+\phi(E_c)=W^c_{loc}\\ &\Rightarrow \varphi^t_X(W^c_{loc})\subseteq W^c_{loc}\end{aligned}$$

Como las únicas suposiciones dadas para esta invarianza fueron sobre la magnitud de $|t|$ y sobre $x\in U\cap W^c_{loc}$ se tiene la invarianza local. Por definición de variedad central local se sigue el resultado.

(d) Supongamos la invarianza local de W^c_{loc} asociado a ϕ (y por tanto, que sea una variedad central local) en una vecindad del oriden V. El P.V.I.:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\varphi^t_X(\xi+\phi(\xi))=x^*(t,\xi)\\ x(0)=\xi+\phi(\xi)\end{cases}$$

tiene (por definición de ϕ) la misma solución que el P.V.I.:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=X(x(t))\\ x(0)=\xi+\phi(\xi)\end{cases}$$

De donde la invarianza local bajo flujo implica que para la vecindad V se cumple:

$$\varphi_X^{I_x\cap\varphi^{-1}_{X,x}(V)}(W^c_{loc}\cap V)\subseteq W^c_{loc}$$

luego para $|t|$ suficientemente pequeño como para estar en $\varphi^{-1}_{X,x}(V)$ se tiene que:

$$\pi_h(x^*(t,\xi))=\pi_h[\pi_c x^*(t,\xi)+\phi(\pi_c x^*(t,\xi))]=\phi(\pi_c x^*(t,\xi))$$

Derivando se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\pi_h(\varphi_X^t(\xi+\phi(\xi))) = \phi(\pi_c\varphi_X^t(\xi+\phi(\xi))) \\
\Rightarrow\ &\pi_h(X(\xi+\phi(\xi))) = D\phi(\pi_c x^*(t,\xi))\pi_c X(\xi+\phi(\xi)) \\
\Rightarrow\ &X_h = D\phi(\pi_c x^*(t,\xi))X_c \\
\Rightarrow\ &X_h = D\phi(\xi)X_c
\end{aligned}$$

Con la última expresión dándose por tomar $t=0$ y aprovechando que $x^*(0,\xi)=\xi+\phi(\xi)$ con $\phi: E_c \to E_h$, entonces $\pi_c x^*(0,\xi) = \pi_c(\xi+\phi(\xi)) = \xi$.

$\square$

Visualización 1.43. Podemos visualizar el Lema anterior como sigue:

Tenemos que para E_c un espacio bidimensional sobre un espacio tridimensional, o un espacio unidimensional sobre un espacio bidimensional, se cumple que la función ϕ es más bien una superficie (curva respectivamente). Luego su derivada toma un vector en la dirección de X_c flecha sobre un punto de aplicación de algún valor cercano a E_c, y nos devuelve la altura en la dirección E_h.En ese sentido, la perturbación queda caracterizada si se cumple que el campo sobre un punto perturbado hacia arriba/abajo del plano/recta central es tangente a la superficie generada por dicha perturbación, vista de forma local sobre el origen.

Ejemplo 1.44. Tomando el campo de la forma:

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y \end{pmatrix}$$

Aprovechamos que $E_c = \langle e_1\rangle, E_h = \langle e_2\rangle$. De donde $\phi: (x,0) \mapsto (0,\psi(x))$. Además, se obtiene que la variedad central local queda determinada por la ecuación funcional:

$$\begin{cases} D\phi(z)\pi_c X(z+\phi(z)) = \pi_h X(z+\phi(z)) \\ \phi(0) = 0 \\ D\phi(0) = 0 \end{cases}$$

Reemplazando con $z=(x,0)$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \psi'(x) & 0 \end{bmatrix} X_1(x,\psi(x))e_1 = X_2(x,\psi(x))e_2 \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi'(x)X_1(x,\psi(x)) = X_2(x,\psi(x)) \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi'(x)x^2 = -\psi(x) \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{x}} & x < 00 \\ x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Lo que corresponde a que para el campo Silla-Nodo se tenga que las hojas de entrada de forma exponencial en el lado del nodo y laa única recta de salida en el lado de la silla actúen como variedad central.

Teorema 1.45 (Toda Variedad Central Local es parte de una Variedad Central Global)**.** *Supongamos que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ para algun $k \geq 1, f(0) = 0, Df(0) = 0$ y $\phi \in W^c_{loc}$ define una variedad central local. Entonces, para todo $0 < \delta \leq \delta_0$, existe una vecindad del origen V tal que, mapeos $\tilde{f} \in C^k_b(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^{k+1}_b(E_c, E_h)$ satisfaciendo que:*

1. *$\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in V$.*
2. *$||D\tilde{f}|| < \delta$*
3. *La variedad central global asociada a $\tilde{f}$ y a ψ, denotada por W^c, satisface:*

$$W^C_{loc} \cap V = W^c \cap V$$

Demostración. 1. Supongamos que la variedad central local es E_c:

(a) Entonces existe una vecindad del origen $V \subseteq E_c$ tal que los puntos de V verifican la invarianza local. Por lo tanto:

$$\phi(\xi) = 0, \forall \xi \in V \cap E_c$$

Si no, $\xi + \phi(\xi) \notin E_c$ debido a descomposición en $E_h \oplus E_h$.

(b) Usando Lema, podemos tomar la vecindad como bola abierta:

$$\exists d > 0 : B_d(0) \subseteq V$$

De donde se cumple que:

$$\begin{gathered} \forall \xi \in B_d(0) \cap E_c, \phi(\xi) = 0 \\ \Rightarrow X_h(\xi + \phi(\xi)) = 0 \\ \Rightarrow \pi_h X(\xi + \phi(\xi)) = \pi_h X(\xi) = \pi_h A(\xi) + \pi_h f(\xi) = \pi_h f(\xi) = 0 \end{gathered}$$

(c) Sea $\rho < \frac{d}{2}$, entonces el soporte de f_ρ está contenido en $B_d(0)$, de donde se cumple:

$$\begin{gathered} f_\rho(x) = f(x)\S\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \Rightarrow \pi_h f_\rho(x) = \pi_h f(x)\S\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \Rightarrow \forall \xi \in B_d(0) \cap E_c, f_\rho(\xi) = 0 \end{gathered}$$

(d) De donde se cumple la invarianza de E_c bajo el flujo del campo con parte no lineal f_ρ en la vecindad $B_d(0)$. Por tanto, la invarianza total de E_c bajo el flujo del campo con parte no lineal f_ρ en general.

(e) Por limite de la funcion corte, tenemos que $||Df_\rho|| < \delta < \delta_0$ para ρ suficientemente pequeño. Por lo que la unica variedad central global asociada a f_ρ es E_c (dado que también esta definida como una perturbacion Lipschitz y sabemos que dihcas perturbaciones invariantes son unicas).

(f) Por tanto, tomando $\tilde{f} := f_\rho$, $B_d(0)$ como vecindad y ψ extension cumpliendo que $\psi : E_c \mapsto 0$ se cumple el resultado.

2. Para el caso general, basta hacer un proceso analogo:

(a) Sea $\phi \in C_b^k(E_c; E_h)$ la función que define la variedad central local. Entonces, existe una vecindad del origen V tal que se verifica la ecuación del Lema de Caracterización de Variedad Central Local:

$$D\psi(\xi)\pi_c X(\xi + \psi(\xi)) = \pi_h X(\xi + \psi(\xi)), \forall \xi \in V \cap E_c$$

(b) Podemos definir la funcion de perturbacion extendida segun:

$$\psi(\xi) := \phi(\xi)\S\left(\frac{\xi}{\rho}\right)$$

ahora bien, podemos obtener la transformacion:

$$\begin{aligned} \Psi(x) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x - \psi(\pi_c x) \end{aligned}$$

la cual cumple:

i. La imagen de la variedad central es el espacio central:

$$\Psi(W^c) = E_c$$

ii. Existe la funcion inversa:

$$\begin{aligned} \exists \Psi^{-1} &: E_c \to W^c \\ y = x - \psi(x) = \Psi(x) &\mapsto y + \psi(\pi_c y) \end{aligned}$$

En efecto, basta ver que:

$$\begin{aligned} \Psi(y + \psi(\pi_c y)) &= y + \psi(\pi_c y) - \psi(\pi_c(y + \psi(\pi_c y))) \\ &= y + \psi(\pi_c y) - \psi(\pi_c y) \\ &= y \end{aligned}$$

Es más, lo anterior nos indica de forma inmediata que y es parte del espacio central cuando x es parte de la variedad central local.

(c) Usando el cambio de coordenadas Ψ tenemos:

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) = X(\Psi^{-1}(y(t))) \mapsto \dot{y}(t) + D\psi(\pi_c y(t))\frac{d}{dt}(\pi_c y)(t) = X(\Psi^{-1}(y(t)))$$

Aplicando π_c obtenemos:

$$\pi_c\dot{y}(t) = \pi_c X(\Psi^{-1}(y(t))) - \pi_c D\psi(\pi_c y(t))X_c(\pi_c y(t)) = \pi_c X(\Psi^{-1}(y(t))) = X_c(\pi_c y(t))$$

De donde podemos reescribir la nueva ecuación diferencial como:

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= X(y+\psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c X(\pi_c y + \psi(\pi_c y)) \\
&= A(y+\psi(\pi_c y)) + f(y+\psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[A(\pi_c y+\psi(\pi_c y)) + f(y+\psi(\pi_c y))] \\
&= Ay + A\psi(\pi_c y) + f(y+\psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + A\psi(\pi_c y) + f(y+\psi(\pi_c y))] \\
&= Ay + A\psi(\pi_c y) + f(y+\psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(y+\psi(\pi_c y))]
\end{aligned}
$$

Lo que puede resumirse como:

$$\dot{y} = Ay + g(y)$$

donde:

$$g(y) = A\psi(\pi_c y) + f(y+\psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y(t))\pi_c[Ay + f(y+\psi(\pi_c y))]$$

(d) Como E_c es variedad central local del nuevo campo, tenemos que existe una función perturbación y abierto (por parte anterior). Denotemos a dichos objetos como $\tilde{g} \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ y $\tilde{V}$, verificando que sus restricciones coincidan:

$$g_{|_{\tilde{V}}} = \tilde{g}_{|_{\tilde{V}}}$$

y que E_c es la única variedad central global asociada a $\tilde{g}$. Además, podemos hacer que $||D\tilde{g}||$ ea arbitrariamente pequeño.

(e) Volviendo a transformar la ecuación diferencial asociada a $\tilde{g}$ mediante Ψ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) = \tilde{Y}(\Psi(x(t))) \mapsto \dot{x}(t) - D\psi(\pi_c x(t))\frac{d}{dt}(\pi_c x)(t) &= A\Psi(x(t)) + \tilde{g}(\Psi(x(t))) \\
\equiv \dot{x}(t) &= A\Psi(x(t)) + \tilde{g}(\Psi(x(t))) + D\psi(\pi_c x(t))\frac{d}{dt}(\pi_c x)(t)
\end{aligned}
$$

Como antes, aplicando π_c:

$$\pi_c \dot{x}(t) = \pi_c X(\Psi(x(t))) = A\pi_c x(t) + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x(t)))$$

De donde podemos reescribir la nueva ecuación diferencial como:

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x)$$

donde:

$$\tilde{f}(x) = -A\psi(\pi_c x) + \tilde{g}(x - \psi(\pi_c x)) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(x - \psi(\pi_c x))]$$

(f) Como ψ tiene soporte compacto (heredado por §), y $\tilde{g} \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C_b^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, se cumple que cualquier expresión elemental de éstos (y de las derivadas de ψ, por el soporte) cumple estar en $C_b^k(\mathbb{R}^n)$. Es decir, que $\tilde{f} \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, de donde podemos aplicar los Teoremas anteriores.

(g) Verificaremos ahora los resultados buscados del Teorema para $V := \Psi^{-1}(\tilde{V})$:

i. Reemplazando en la expresión para $x \in \tilde{V}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= -A\psi(\pi_c x) + \tilde{g}(x - \psi(\pi_c x)) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(x - \psi(\pi_c x))] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + \tilde{g}(\Psi(x)) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + g(\Psi(x)) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c g(\Psi(x))] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + g(y) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c g(y)] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c y) + f(\Psi^{-1}(y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(\Psi^{-1}(y))] \\
&\quad + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c[A\psi(\pi_c y) + f(\Psi^{-1}(y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(\Psi^{-1}(y))]]] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c y) + f(x) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(x)] \\
&\quad + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c[A\psi(\pi_c y) + f(x) - D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(x)]]] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c y) + f(x) - D\psi(\pi_c y)\pi_c A(y + \psi(\pi_c y)) - D\psi(\pi_c y)\pi_c f(x) \\
&\quad + D\psi(\pi_c x)A\pi_c x + D\psi(\pi_c y)\pi_c f(x) + D\psi(\pi_c x)\pi_c D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(x)] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c y) + f(x) \\
&\quad + D\psi(\pi_c x)\pi_c D\psi(\pi_c y)\pi_c[Ay + f(x)] \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c[x + \phi(\pi_c x)]) + f(x) \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c[x + \phi(\pi_c x)]) + f(x) \\
&= -A\psi(\pi_c x) + A\psi(\pi_c x) + f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

ii. Desarrollando la definición de $\tilde{f}$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= -A\psi(\pi_c x) + \tilde{g}(\Psi(x)) + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))] \\
\Rightarrow D\tilde{f}(x) &= -AD\psi(\pi_c x)\pi_c + D\tilde{g}(\Psi(x))D\Psi(x) \\
&\quad + D^2\psi(\pi_c x)\pi_c[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))] \\
&\quad + D\psi(\pi_c x)[A\pi_c + \pi_c D\tilde{g}(\Psi(x))D\Psi(x)] \\
\Rightarrow ||D\tilde{f}(x)|| &\leq ||AD\psi(\pi_c x)\pi_c|| + ||D\tilde{g}(\Psi(x))D\Psi(x)|| \\
&\quad + ||D^2\psi(\pi_c x)\pi_c[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))]|| \\
&\quad + ||D\psi(\pi_c x)[A\pi_c + \pi_c D\tilde{g}(\Psi(x))D\Psi(x)]|| \\
&\leq ||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| + ||D\tilde{g}|| \cdot ||D\Psi|| \\
&\quad + ||D^2\psi(\pi_c x)\pi_c[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))]|| \\
&\quad + ||D\psi|| \cdot ||A|| \cdot ||\pi_c|| + ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \cdot ||D\tilde{g}|| \cdot ||D\Psi|| \\
&= ||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| + ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||) \\
&\quad + ||D^2\psi(\pi_c x)\pi_c[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))]|| \\
&\quad + ||D\psi|| \cdot ||A|| \cdot ||\pi_c|| + ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \cdot ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||) \\
&= 2||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \\
&\quad + ||D^2\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))]|| \\
&\quad + ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||)^2
\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\begin{aligned} ||D\tilde{f}(x)|| \leq 2||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \\ + ||D^2\psi(\pi_c x)[A\pi_c x + \pi_c \tilde{g}(\Psi(x))]|| \\ + ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||)^2 \end{aligned}$$

Sabemos que la segunda derivada es acotada por $\psi \in C_b^2(E_c; E_h) \subseteq C_b^{k+1}(E_c; E_h)$ (la cual se obtuvo tras derivar la forma integral de ψ 2 veces). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ||D\tilde{f}(x)|| \leq 2||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \\ + ||D^2\psi|| \cdot (||A|| \cdot ||\pi_c|| \cdot ||x|| + ||\pi_c|| \cdot ||\tilde{g}(\Psi(x))||) \\ + ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||)^2 \end{aligned}$$

Recordemos que (por el T.F.C.) podemos expresar las igualdades:

$$\begin{aligned} \psi(\pi_c x) &= \left(\int_0^1 D\psi(\mu \pi_c x) d\mu \right)(\pi_c x) \\ &= \left(\int_0^1 D\psi([1-\theta]\pi_c x) d\theta \right)(-\pi_c x) \\ \tilde{g}(\Psi(x)) &= \left(\int_0^1 D\tilde{g}([1-\theta]\Psi(x)) d\theta \right)(\Psi(x)) \end{aligned}$$

Luego obtenemos las siguientes cotas sobra la norma:

$$\begin{aligned} \sup_{||x|| \leq x_0} ||\psi(\pi_c x)|| &\leq \sup || - \pi_c x|| \left(\sup ||D\psi(x)|| \right) \\ &\leq ||\pi_c|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||x_0|| \\ \sup_{||x|| \leq x_0} ||\tilde{g}(\Psi(x))|| &\leq ||D\Psi|| \cdot ||D\tilde{g}|| \cdot ||x_0|| \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} ||D\tilde{f}(x)|| \leq 2||A|| \cdot ||D\psi|| \cdot ||\pi_c|| \\ + ||D^2\psi|| \cdot (||A|| + (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||) \cdot ||D\tilde{g}||) \cdot ||\pi_c|| \cdot ||x|| \\ + ||D\tilde{g}|| \cdot (1 + ||\pi_c|| \cdot ||D\psi||)^2 \end{aligned}$$

Como $\psi = \phi_d$ tenemos que podemos controlar las derivadas según:

$$\begin{aligned} ||D^2\psi(x)|| &= ||\S\left(\frac{x}{d}\right)D^2\phi(x) + \frac{2}{d}D\S\left(\frac{x}{d}\right)D\phi(x) + \frac{1}{d^2}D^2\S\left(\frac{x}{d}\right)f(x)|| \\ &\leq ||\S\left(\frac{x}{d}\right)D^2\phi(x)|| + \frac{2}{d}||D\S\left(\frac{x}{d}\right)D\phi(x)|| + \frac{1}{d^2}||D^2\S\left(\frac{x}{d}\right)f(x)|| \\ \Rightarrow \lim_{d\to 0} ||D^2\psi(x)|| = 0 \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\forall\delta > 0, \exists d_0 > 0 : [d < d_0 \Rightarrow ||D\tilde{f}(x)|| \leq \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{6} = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Por tanto, podemos escoger $\tilde{V}$ lo suficientemente pequeño como para que cumpla que está dentro de la región delimitada por $B_d(0)$

iii. Como $\psi_{|_{B_d[0]\cap E_c}} = \phi_{|_{B_d[0]\cap E_c}}$, tenemos que para $\tilde{V}$ suficientemente pequeño se cumple que $\pi_c V \subseteq B_d[0]$.

Por tanto, se cumple la intersección dada por $W^C_{loc} \cap V = W^c \cap V$

Como E_c es la variedad central global del campo transformado,asociado a $\tilde{g}$, se tiene la invarianza local de $\Psi^{-1}(E_c)$ bajo $\tilde{f}$.

□

Teorema 1.46 (Órbitas completas suficientemente pequeñas son parte de la variedad central)**.** *Existe una vecindad del origen tal que cualquier órbita completa pertenece a la variedad central local. Es decir, que dadas las condiciones del Teorema anterior, se cumple que:*

$$\exists\Omega \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^n,\tau_{\mathbb{R}^n})} : (\forall x \in \Omega, I_x = \mathbb{R} \Rightarrow x \in W^c_{loc})$$

Demostración. Supongamos las condiciones del teorema anterior y que V es acotado (si no, puede reducirse lo suficientemente). Tenemos que, debido a la invarianza local:

$$\forall x \in V, [I_x \cap \varphi^{-1}_{X,x}(V) = \mathbb{R} \Rightarrow \varphi^t_X(x) \in W^c_{loc}]$$

Definamos el campo asociado a $\tilde{f}$ como:

$$\tilde{X}(x) := Ax + \tilde{f}(x)$$

De donde tendremos que:

$$\tilde{X}_{|_V} = X_{|_V}$$

Por tanto se determina la curva solución de forma única según:

$$\varphi_{X,x}(t) = \varphi^t_X(x) = \varphi^t_{\tilde{X}}(x) = \varphi_{\tilde{X},x}(t)$$

Lo cual implica que $\varphi_{X,x}(t)$ es curva solución para $\tilde{X}$ y es globalmente acotada. Debido a que podemos controlar la cota de la derivada, podemos aplicar el Teorema de la Variedad Central Global en su caracterización de W^c para obtener que, de igual forma que en el Teorema de existencia de una Variedad central local, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\pi_h \varphi_X^t(x)| < \infty$ nos permite obtener que $x \in W^c_{loc}$ □

Corolario 1.47 (Órbitas acotadas suficientemente pequeñas son parte de la variedad central)**.** *Toda órbita acotada suficientemente pequeña es parte de la variedad central local*

Demostración. Toda órbita acotada puede completarse en el conjunto acotado, si éste es suficientemente pequeño, estará dentro de $\Omega = V$. Para completar las órbitas basta completar el campo original. □

Teorema 1.48 (Variedades centrales locales tienen contacto dado por su suavidad)**.** *Supongamos que $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para $k \geq 1$, parte no lineal, con 2 Variedades Centrales Locales asociadas de clase C^{k+1} denotadas por M_{ϕ_1}, M_{ϕ_2}. Entonces:*

$$\forall 1 \leq j \leq k, D^j\phi_1(0) = D^j\phi_2(0)$$

Demostración. Sabemos que construimos la función ψ_j a partir de ϕ_j, la cual determina una variedad central global extendida. La variedad central global determina la función como una integral a partir de A y de $\tilde{f}_j$ en una vecindad del origen (esto se debe a que la integral se evalúa en $x^*(\tau_\xi)$ las cuales están acotadas), por lo cual ambas funciones ψ_j coinciden en una vecindad del origen, con lo cual las derivadas de hasta orden k en el origen (las cuales son posibles por la suavidad de $\tilde{f}_j$ y de x^*, a su vez dadas por el campo) coinciden. Por tanto, las derivadas de hasta orden k de ϕ_j coinciden en el origen. Como el contacto se toma a partir de la derivada, se cumple el resultado. □

Comentario 1.49. Podemos aplicar la reducción de un campo a la variedad central para poder estudiar campos parametrizados. Es decir, para poder estudiar funciones de la forma $X : \Lambda \to \mathcal{X}^r(U)$, o lo que es lo mismo, para familias de campos vectoriales $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.Para esto, introduciremos al parámetro como parte de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
&\dot{u} = X_\lambda(x, y, z) = X(x, y, z, \lambda)\\
&\dot{\lambda} = 0
\end{aligned}$$

Con esta ecuación diferencial, asociamos:

$$\begin{aligned}
\widehat{X} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\\
(x, y, z, \lambda) &\mapsto \widehat{X}(x, y, z, \lambda) = (X_\lambda(x, y, z), 0)
\end{aligned}$$

2. De la expresión anterior obtenemos que la parte central, y por tanto, el diagrama de fase, queda determinado en su totalidad por:

$$\dot{z} = Cz + h(x, y, z, \lambda)$$

donde C es la parte lineal central del nuevo sistema de ecuaciones diferenciales.

3. Podemos visualizar esto como sigue: Si tenemos que cada campo nos da un diagrama de fase en un plano (para el caso de $n = 2$), entonces el campo extendido $\widehat{X}$ que resulta de apilar estos diagramas de fase ordenadamente a lo largo del eje paramétrico (para $m = 1$) llena el espacio de vectores. Cada campo es independiente de los demás, si no, tendríamos que las curvas solución serían interdependientes, de donde se contradice el hecho de que cada campo X_λ admite solución por sí sólo. Luego es natural tomar $\dot{\lambda} = 0$, que es lo mismo que decir que los vectores no varían en la dirección del parámetro, o que las múltiples fotos de los diagramas de fase funcionan como pilas de fotos, independientes entre sí.

2 Variedades Invariantes Hiperbólicas

Comentario 2.1. En el desarrollo de la existencia de la Variedad usamos la constante $\beta < \min\{|\Re(\lambda)| : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\}$. Su uso se debe a que en el texto de Tópicos de E.D.O. se verifica que los valores de crecimiento/decaímiento quedan dominados por números con parte real menor/mayor respectivamente. Coloquemos para cada caso números $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < 0 < b$, verificando:

$$a > \max\{\Re(\lambda) < 0 : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\}$$
$$b < \min\{\Re(\lambda) > 0 : \lambda \in \sigma_u \cup \sigma_s\}$$

Si la variedad central fue caracterizada por su crecimiento/decaímiento, es natural preguntarse si el control sobre crecimientos y decaimientos mayores a los controlados resultan en otras variedades invariantes y si dichas posibles variedades están relacionadas de alguna forma con los espacios estable/inestable

Proposición 2.2 (Propiedades de $C^1_b, C^{1,1}_b$). *Los espacios son espacios vectoriales Banach*

Definición 2.3 (Operador de Lyapunov-Perron).

Proposición 2.4 (Operador L-P es contracción).

Proposición 2.5 (Operador L-P es diferenciable).

Definición 2.6 (Funciones inducidas).

Proposición 2.7 (Continuidad de funciones inducidas).

Teorema 2.8 (Variedades invariantes de crecimiento superior). *Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ números reales con $a < b$. Sean las ecuaciones diferenciales dadas por:*

$$\dot{x} = Sx + F(x, y)$$
$$\dot{y} = Uy + G(x, y)$$

Con $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, U : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ transformaciones lineales.
Supongamos que:

1. *Los números a, b dominan el crecimiento/decaímiento de las transformaciones lineales:*

$$\max\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma_S\} < a$$
$$\min\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma_U\} > b$$

2. *Las funciones $F \in C^1(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k), G \in C^1(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ son la parte no lineal de la ecuación diferencial. Es decir:*

$$F(0, 0) = 0$$
$$DF(0, 0) = 0$$
$$G(0, 0) = 0$$
$$DG(0, 0) = 0$$

y que $||F||_1, ||G||_1$ son suficientemente pequeñas

Entonces:

1. *Existe una única función* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ *satisfaciendo:*

$$\alpha(0) = 0$$
$$D\alpha(0) = 0$$
$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^k} ||D\alpha(\xi)|| < \infty$$

   cuyo gráfico es una variedad invariante. Esto es, una variedad que es invariante bajo la función φ_X^t *en cada* $t \in \mathbb{R}$*. O lo que es lo mismo:*

$$\varphi_X^t(\alpha(\mathbb{R}^k)) \subseteq \alpha(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^l$$

2. *Además, tenemos que, para cada* $\lambda > \alpha$*, hay una constante* $C > 0$ *tal que las curvas solución* $(x(t), y(t))$ *con condición inicial* $(\xi, \alpha(\xi))$ *satisfacen:*

$$||x(t)|| + ||y(t)|| \leq Ce^{\lambda t}||\xi||$$

   O lo que es lo mismo:

$$\forall \lambda > \alpha \exists C > 0 : ||\varphi_X^t(\xi, \alpha(\xi))_{|_{\mathbb{R}^k}}|| + ||\varphi_X^t(\xi, \alpha(\xi))_{|_{\mathbb{R}^l}}|| \leq Ce^{\lambda t}||\xi||$$

Corolario 2.9 (Teorema de la Variedad Estable e Inestable)**.**

Teorema 2.10 (Teorema de la Variedad Estable)**.** *Sea* $0 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $X \in \mathcal{X}^1(E)$*. Supongamos que* $X(0) = 0$ *y que* $i^-(DX(0)) = k, i^+(DX(0)) = n - k$*.*

Luego:

$$\exists S \text{ } k\text{-variedad dif. tangente a } E^s_{DX(0)} : \forall t \geq 0, \varphi_X^t(S) \subseteq S \wedge \forall x_0 \in S, \lim_{t \to \infty} \varphi_X^t(x_0) = 0$$

Además,

$$\exists U \text{ } k\text{-variedad dif. tangente a } E^u_{DX(0)} : \forall t \leq 0, \varphi_X^t(U) \subseteq U \wedge \forall x_0 \in U, \lim_{t \to -\infty} \varphi_X^t(x_0) = 0$$

Definición 2.11 (Variedad estable e inestable global)**.** Definimos la variedad estable e inestable globales en 0 (el origen) como:

$$W^s(0) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi_X^t(S)$$
$$W^u(0) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_X^t(U)$$

2.1 Computación de Variedades Invariantes

Lema 2.12 (Ecuación Integral)**.**

Definición 2.13.

Lema 2.14 (Gráfico Local de la variedad Estable)**.**

Lema 2.15 (Espacio Estable y Variedad Estable)**.**

Teorema 2.16 (Teorema de la superficie estable)**.**