

Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026

Índice

1	Ramificaciones	1
1	Anillos Locales	1
2	Diagrama de Newton	1

Capítulo 1

Deformaciones Versales

1 Clasificación de Campos Parametrizados

La mayoría de demostraciones dadas en la siguiente sección están en el texto de **chow1994normal**. La visualización y la intuición detrás de la decisión de clasificar los problemas de bifurcación puede hallarse como esbozo en el texto de **golubitsky1985singularities**

Definición 1.1 (Deformación). Sea $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz fija. Si la función $A : \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es C^1 y $A(0) = A_0$ entonces se dice que es una deformación de A_0

Definición 1.2 (Deformación Inducida). Sean $A : \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, B : \Delta \subseteq \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ deformaciones de A_0 .

Si existe una deformación $C : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ de la identidad Id y un mapeo $\phi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Lambda$ de clase C^1 verificando:

1. $B(\mu) = C(\mu)A(\phi(\mu))(C(\mu))^{-1} \forall \mu \in \tilde{\Delta}$
2. $\phi(0) = 0$

Entonces decimos que B está inducida de A mediante (C, ϕ)

Comentario 1.3. El proceso es formar caminos de matrices empezando ambos de A_0 de forma que cada matriz del camino sea conjugada con respecto de la otra. Notar que para la definición de deformación inducida sólo requerimos que lo sea en algún conjunto abierto conteniendo al origen $\tilde{\Delta}$

Proposición 1.4 (Cambio de coord. inducido). Sean $X : \Delta \rightarrow \mathcal{X}^r(M), Y : \Lambda \rightarrow \mathcal{X}^r(N)$ campos vectoriales parametrizados y $\phi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Lambda$ de clase C^1 verificando $\phi(0) = 0$.

Si hubiera un cambio de coordenadas parametrizado suave $\xi : \tilde{\Delta} \rightarrow \text{Diff}^1(M, N)$ verificando:

1. $D\xi_0 = \text{Id}$
2. $X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu} Y_{\phi(\mu)}$

entonces $B(\mu) := A_{X_\mu}$ es deformación inducida de $A(\lambda) := A_{Y_\lambda}$. por $C(\mu) := D\xi_\mu(0)$ y $\phi : \mu \mapsto \lambda$.

Además, $X_0 = Y_0$

Demostración. Sea el cambio de coordenadas parametrizado $x = \xi_\mu(y)$ suave (difeomorfismo) verificando $D\xi_0 = \text{Id}$ y $X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu} Y_{\phi(\mu)}$

Se cumple:

$$\dot{x} = v + A_{X_\mu}x + f(x) \mapsto \dot{y} = (D\xi_\mu(x))^{-1}v + A_{Y_{\phi(\mu)}}y + g(y)$$

donde $A_{Y_{\phi(\mu)}} = (D\xi_\mu(0))^{-1}A_{X_\mu}D\xi_\mu(0)$.

Se tiene que:

$$A_{X_\mu} = D\xi_\mu(0)A_{Y_{\phi(\mu)}}(D\xi_\mu(0))^{-1}$$

Además, $\phi(0) = 0 \Rightarrow A_{Y_0} = A_{Y_{\phi(0)}} = (D\xi_0(0))^{-1}A_{X_0}D\xi_0(0) \Rightarrow A_{Y_0} = A_{X_0}$ por $D\xi_0(0) = 0$

De donde se sigue el resultado. \square

Corolario 1.5 (Cambio de coord. inducido). Sean $X : \Delta \rightarrow \mathcal{X}^r(M), Y : \Lambda \rightarrow \mathcal{X}^r(N)$ campos vectoriales parametrizados y $\phi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Lambda$ difeomorfismo de clase C^1 verificando $\phi(0) = 0$.

Si hubiera un cambio de coordenadas suave ξ_μ verificando:

1. $\xi_0 = \text{Id}$

2. $X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu} Y_{\phi(\mu)}$

entonces A_{X_μ} es deformación inducida de A_{Y_λ} por $D\xi_\mu(0)$ y $\phi : \mu \mapsto \lambda$.

Además, $X_0 = Y_0$

Comentario 1.6. Si tenemos el cambio de coordenadas dado por $\xi_0 = \text{Id}$ y ξ_μ cambio de coordenadas parametrizado suave, se tiene que la parte lineal es deformación inducida del otro.

Si hay equivalencia topológica entre campos y el homeomorfismo h fuera suave, entonces éste valdría como cambio de coordenadas entre las deformaciones de campos.

Si las partes lineales de campos (tras los re-escalamientos temporales) no son deformaciones inducidas, entonces no pueden ser equivalencias topológicas de homeomorfismo h suave.

En otras palabras, las deformaciones inducidas nos dan particiones del espacio de campos, los cuales podemos estudiar para ver cuáles casos pueden ser topológicamente equivalentes con homeomorfismo suave.

Definición 1.7 (Condiciones Equivalencia Paramétrica). Sea $X : \Delta \rightarrow \mathcal{X}^r(M), Y : \Lambda \rightarrow \mathcal{X}^k(M)$ campos vectoriales parametrizados. Decimos que $\phi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \phi(\tilde{\Delta}) \subseteq \Lambda$ difeomorfismo de clase C^1 y $\xi : \tilde{\Delta} \rightarrow \text{Diff}^1(M)$ cumplen las condiciones $D(X, Y)$ de equivalencia paramétrica para $X : \Delta \rightarrow \mathcal{X}^r(M), Y : \Lambda \rightarrow \mathcal{X}^r(M)$ campos parametrizados si :

1. $\phi(0) = 0$

2. $\xi_0 = \text{Id}$

3. $X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu} Y_{\phi(\mu)}$

Si ϕ, ξ satisfacen las condiciones $D(X, Y)$, denotaremos esta proposición por $\phi, \xi \vdash D(X, Y)$

Comentario 1.8. 1. Cumplir las condiciones de equivalencia paramétrica implica que ambos campos sean "deformaciones" de un campo original $X_0 = Y_{\phi(0)} = Y_0$, los cuales son parametrizados por μ y λ , de forma que haya una función diferenciable $\phi : \mu \rightarrow \lambda$ la cual nos permita expresar los parámetros de la segunda deformación Y_λ en la forma X_μ .

2. Podemos ver, por ejemplo, el campo Y_λ parametrizado por $\lambda \in \mathbb{R}^2$, Si las funciones $\phi : \mu \mapsto \lambda = (\mu, 0)$ y ξ_μ verifican condiciones de equivalencia paramétrica, entonces se puede ver que X_μ camino de campos deforma el campo X_0 y $Y_{\phi(\mu)}$ también es un camino de campos, el cual es "inducido" del "plano" de campos Λ , verificándose que $X_\mu \equiv_{top.conj.} Y_{\phi(\mu)}$ en cada punto del camino μ . Es decir, que a lo largo de la curva de deformaciones del campo original, en cada punto μ hay conjugación topológica.

3. Podemos notar además, que el difeomorfismo ϕ lo es sólo sobre su imagen.

Definición 1.9 (Relación Equivalencia Paramétrica). Definimos sobre el conjunto de campos parametrizados $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{X}^r(M))$ la relación equivalencia paramétrica dada por:

$$X \sim_{E.P.} Y \iff \left[\begin{array}{l} \exists((\phi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \phi(\tilde{\Delta}) \subseteq \Lambda) \in \text{Diff}^1, \xi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \text{Diff}^1(M)) \vdash D(X_\mu, Y_\lambda) \\ \vee \exists((\psi : \tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda \rightarrow \psi(\tilde{\Lambda}) \subseteq \Delta) \in \text{Diff}^1, \eta : \tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda \rightarrow \text{Diff}^1(M)) \vdash D(Y_\lambda, X_\mu) \end{array} \right]$$

donde $X : \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}^r(M), Y : \Lambda \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{X}^r(M)$ y $\tilde{\Delta}, \tilde{\Lambda}$ son superficies de Δ y de Λ respectivamente.

Comentario 1.10. 1. Usamos $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ de manera referencial. En realidad cualquier variedad de los espacios de parámetros sería suficiente. En tal caso, tomamos $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C^1(\Lambda_\alpha; \mathcal{X}^r(M))$ donde $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$

Además, la última parte sobre la necesidad de alguno de $\tilde{\Delta}, \tilde{\Lambda}$ siendo superficie queda reducida a subvariedad.

2. La pérdida de la relación de equivalencia viene dada por tomar algún subconjunto y no todo el conjunto. Debido a esto, impusimos la condición de que los subconjuntos sean subvariedades. Nos resulta difícil, por no decir imposible, escapar del lenguaje de la variedad debido a que buscamos que sean iguales en un conjunto no trivial.

Si fuera en cualquier subconjunto, todos los campos parametrizados que deformen un campo X_μ y Y_μ verificando $X_0 = Y_0$ son topológicamente equivalentes, de donde tendríamos que basta tomar alguno de los ejemplos anteriores donde hay bifurcación transcítica para ver que esto no es útil a la clasificación.

Si fuera sobre conjuntos abiertos, perderíamos la clasificación de deformaciones de acuerdo a su cantidad de parámetros y no podríamos utilizar la cantidad de parámetros para buscar representantes útiles.

Si fuera sobre subespacios perdemos la topología de los espacios de parámetros y nos forzamos a trabajar sobre \mathbb{R}^n . En este caso, pese a ser el más computacionalmente favorable, aún así tenemos problemas para tratar ejemplos donde utilicemos curvas.

Es por esto que nos forzamos a utilizar la noción de variedad o superficie, aunque no haremos demostraciones muy graves sobre ellas, sino que nos centraremos en el apartado geométrico para tratar los Teoremas básicos.

Proposición 1.11 ($\sim_{E.P.}$ es relación de equivalencia). *La relación de equivalencia paramétrica es relación de equivalencia.*

Demostración. 1. (Reflexividad) Dada por tomar la conjugación topológica $\xi_\mu = \text{Id}$, $\phi = \text{Id}$

2. (Simetría) Dada por la simetría del operador lógico \vee y por las condiciones siendo análogas.

3. (Transitividad) Supongamos que se dan $X \sim_{E.P.} Y, Y \sim_{E.P.} Z$. Entonces hay 2 cambios de coordenadas y dos cambios de parámetros $\xi_\mu^{X,Y}, \xi_\lambda^{Y,Z}, \phi_1, \phi_2$. Tenemos dos casos:

(a) Mismo sentido, es decir:

$$X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu^{X,Y}} Y_{\phi_1(\mu)}, Y_\lambda \xrightarrow{\xi_\lambda^{Y,Z}} Z_{\phi_2(\lambda)}$$

Esto puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(D\xi_\mu^{X,Y}(y) \right)^{-1} X_\mu(\xi_\mu^{X,Y}(y)) = Y_{\phi_1(\mu)}(y) \\ \dot{z} &= \left(D\xi_\lambda^{Y,Z}(z) \right)^{-1} Y_\lambda(\xi_\lambda^{Y,Z}(z)) = Z_{\phi_2(\lambda)}(z) \end{aligned}$$

Para esta situación, basta tomar la composición dada por las composiciones $\xi_\mu^{X,Y} \circ \xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}$ y $\phi_2 \circ \phi_1$:

$$X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu^{X,Y} \circ \xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}} Z_{\phi_2 \circ \phi_1(\mu)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\dot{x} = X_\mu &\Rightarrow D\left(\xi_\mu^{X,Y} \circ \xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)\right) = D\xi_\mu^{X,Y}(\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z))D\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)\dot{z} = X_\mu(\xi_\mu^{X,Y} \circ \xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)) \\
&\Rightarrow D\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)\dot{z} = \left(D\xi_\mu^{X,Y}(\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z))\right)^{-1} X_\mu(\xi_\mu^{X,Y}(\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z))) \\
&\Rightarrow D\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)\dot{z} = Y_{\phi_1(\mu)}(\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)) \\
&\Rightarrow \dot{z} = \left(D\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)\right)^{-1} Y_{\phi_1(\mu)}(\xi_{\phi_1(\mu)}^{Y,Z}(z)) \\
&\Rightarrow \dot{z} = Z_{\phi_2(\phi_1(\mu))}(z) \\
&\Rightarrow \dot{z} = Z_{\phi_2 \circ \phi_1(\mu)}(z)
\end{aligned}$$

(b) Sentido contrario, es decir:

$$X_\mu \xrightarrow{\xi_\mu^{X,Y}} Y_{\phi_1(\mu)}, Z_\lambda \xrightarrow{\xi_\lambda^{Z,Y}} Y_{\phi_2(\lambda)}$$

Como ϕ_2 difeomorfismo, se cumple que $\phi_2^{-1} : \phi_2(\tilde{\Delta}) \rightarrow \tilde{\Delta}$.

Se puede tomar el orden inverso en el segundo cambio de coordenadas:

$$Y_\eta \xrightarrow{(\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}} Z_{\phi_2^{-1}(\eta)}$$

En efecto:

$$\dot{y} = \left(D\xi_\lambda^{Z,Y}(y)\right)^{-1} Z_\lambda(\xi_\lambda^{Z,Y}(y)) = Y_{\phi_2(\lambda)}(y)$$

Luego por el T. de la Función Inversa:

$$\begin{aligned}
&D(\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}\left(\xi_\lambda^{Z,Y}(y)\right)Z_\lambda(\xi_\lambda^{Z,Y}(y)) = Y_{\phi_2(\lambda)}(y) \\
&\Rightarrow D(\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}(z)Z_{\phi_2^{-1}(\phi_2(\lambda))}(z) = Y_{\phi_2(\lambda)}\left((\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}(z)\right) \\
&\Rightarrow \dot{z} = Z_{\phi_2^{-1}(\phi_2(\lambda))}(z) = \left(D(\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}(z)\right)^{-1} Y_{\phi_2(\lambda)}\left((\xi_\lambda^{Z,Y})^{-1}(z)\right)
\end{aligned}$$

Lo que se cumple para $\eta = \phi_2(\lambda)$. Esto es dado para una superficie del espacio de parámetros por imagen de superficie siendo superficie.

De donde se reduce al caso anterior. □

Definición 1.12 (Relación Equivalencia Topológica Paramétrica). Se define sobre el conjunto de campos parametrizados la relación de equivalencia topológica paramétrica:

$$X \simeq_{E.T.P.} Y \iff (X \sim_{E.P} Y) \vee ([\Delta = \Lambda] \wedge [\forall \mu \in \Delta, X_\mu \equiv_{top} Y_\mu])$$

Proposición 1.13 (Relación E.T.P.). *La relación de equivalencia topológica paramétrica es relación de equivalencia.*

Demostración. Inmediata por ser unión de relación de equivalencias. \square

Visualización 1.14. Supongamos que tenemos una bifurcación μ_0 es decir, que dado el campo parametrizado $X : \Delta \rightarrow \mathcal{X}^r(M)$, se tiene que

$$\forall V \in \mathcal{V}_{(\Delta, \tau_\Delta)}(\mu_0), \exists \mu \in V : X_0 := X(\mu_0) \not\equiv_{top} X(\mu)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} & \forall Y \sim_{E.P.} X, Y_{\phi(\mu)} \equiv_{top.conj.} X_\mu \forall \mu \in \tilde{\Delta} \\ \Rightarrow & \forall Z \simeq_{E.T.P.} X, Z_\mu \text{ reparam. temporal de } Y_{\phi(\mu)} \equiv_{top.conj.} W_\mu \text{ reparam. temporal de } X_\mu \forall \mu \in \tilde{\Delta} \end{aligned}$$

De donde:

$$Z \simeq_{E.T.P.} X \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{(\Delta, \tau_\Delta)}(\mu_0), \exists \mu \in V : Z_0 \equiv_{top} X_0 \not\equiv_{top} X(\mu) \equiv_{top} Z(\mu)$$

Es decir, todos los miembros de la clase de equivalencia de un campo parametrizado que atraviesa una bifurcación también atraviesan bifurcaciones.

Luego para buscar bifurcaciones sólo debemos buscar en cada clase de equivalencia algunas bifurcaciones canónicas que nos den más información.

Como cada clase además comparte el hecho de que la parte lineal es una deformación inducida de algún otro miembro, se cumple que si dos campos no tienen la propiedad de ser deformación inducida, entonces no están en la misma caja, luego las bifurcaciones que atraviesan son diferentes. Es decir, hemos creado una clasificación dentro del espacio de campos parametrizados en la que sólo basta con encontrar un campo paramétrico que deforme a uno estructuralmente inestable más sencillo para entender a sus semejantes.

Daremos un criterio adicional para discriminar deformaciones inducidas las cuales hemos representado en el diagrama como las cajas a_{ij}

Proposición 1.15 (Deformación inducida y monomios resonantes). *Dos campos cuya parte lineal está relacionada por una deformación inducida comparten monomios resonantes.*

Demostración. Sea $\xi_\mu y = C(\mu)y$:

$$\begin{aligned} \dot{x} = B(\mu)x + f(x) & \Rightarrow \dot{y} = (C(\mu))^{-1}B(\mu)C(\mu)y + (C(\mu))^{-1}f(C(\mu)y) \\ & \Rightarrow \dot{y} = A(\phi(\mu))y + (C(\mu))^{-1}f(C(\mu)y) \end{aligned}$$

Si tomamos otro campo:

$$\dot{z} = A(\phi(\mu))z + g(z)$$

tenemos que sus A -formas normales quedan determinadas a partir de la descomposición de f y g en $\text{Ker}(L_A^j)$.

Luego los campos tienen la forma:

$$\dot{z} = A(\phi(\mu))z + \sum_{(\alpha,j) \in A \times J} t(g)g^j(z)$$

donde $t(g)$ serán los coeficientes de los campos dependientes de la parte no lineal. \square

Definición 1.16 (Deformación Versal de matrices). Una deformación $A(\lambda)$ de A_0 se llama una deformación versal si toda deformación puede inducirse de ésta.

Se dice que una deformación versal es miniversal si la dimensión de su espacio de parámetros es el mínimo posible de entre las deformaciones de A_0 (garantizado por buen orden de \mathbb{N})

Definición 1.17 (Deformación versal lineal). Una deformación versal lineal de un campo $X_\mu(x)$ es una deformación versal de su parte lineal $A_\mu = A(\mu)$

Definición 1.18 (Relación Parte Lineal). Decimos que dos funciones, $(\phi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \Lambda) \in C^1, \xi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \text{Diff}^1(M)$ satisfacen la condición $E(X, Y)$ si A_{X_μ} deformación inducida de A_{Y_λ} mediante $\phi, D\xi_\mu$

Definimos sobre el conjunto de campos parametrizados $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{X}^r(M))$, la relación parte lineal dada por:

$$X \sim_{P.L.} Y \iff \left[\begin{array}{l} \exists((\phi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \Lambda) \in \text{Diff}^1, \xi : \tilde{\Delta} \subseteq \Delta \rightarrow \text{Diff}^1(M)) \vdash E(X, Y) \\ \vee \exists((\psi : \tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda \rightarrow \Delta) \in \text{Diff}^1, \eta : \tilde{\Lambda} \subseteq \Lambda \rightarrow \text{Diff}^1(M)) \vdash E(Y, X) \end{array} \right]$$

Proposición 1.19 (Relación P.L. es de equivalencia). *La relación parte lineal es relación de equivalencia*

Demostración. 1. (Reflexiva) Inmediato bajo deformación trivial y reparametrización trivial $\xi_\mu = \text{Id}, \phi = \text{Id}$

2. (Simétrica) Inmediato por simetría del operador lógico \vee disyunción

3. (Transitiva) Inmediato, basta tomar el valor los casos dados por las conjugaciones y un orden dado como en la demostración de $\sim_{E.P.}$

(a) En orden directo: Basta componer las deformaciones lineales.

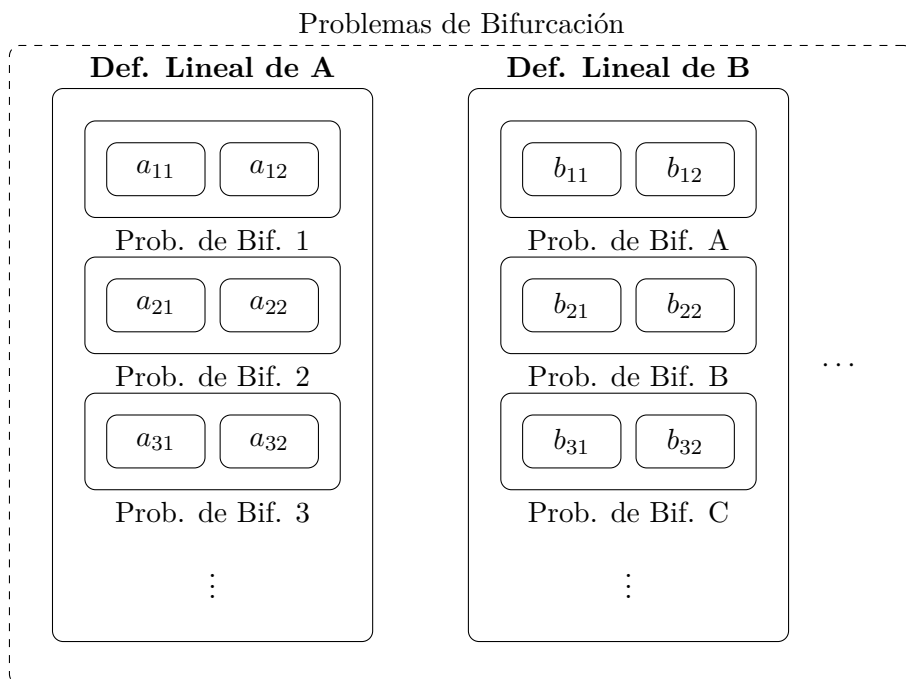
(b) En orden inverso: Basta tomar la recíproca de la deformación lineal para aplicar el ítem anterior.

\square

Proposición 1.20 ($\sim_{E.P.} \leq \sim_{E.T.P.} \leq \sim_{P.L.}$). *Las relaciones de equivalencia están contenidas en el orden equivalencia paramétrica, equivalencia topológica paramétrica y parte lineal. Es decir, si dos campos parametrizados están relacionados por equivalencia paramétrica, entonces están relacionados por equivalencia topológica paramétrica, y si están relacionados por equivalencia topológica paramétrica, entonces lo están por su parte lineal.*

Demostración. La primera parte está dada de forma inmediata. Para ver que la equivalencia topológica paramétrica implica la relación parte lineal, basta tomar el hecho de que si dos campos son topológicamente equivalentes, en el sentido dado por $\simeq_{E.T.P.}$, entonces lo único que se modifica es la reparametrización temporal. En ese caso basta tomar que la parte lineal no se ve afectada por la reparametrización temporal al ser el mismo campo, con única diferencia dada por el flujo. \square

Comentario 1.21 (Estudio de las deformaciones versales). Por proposición anterior, tenemos que las cajas que determinan la partición de los campos que cumplen que tienen la misma deformación de la parte lineal separan a los campos que tengan problemas de bifurcación distintos.



En efecto, si hay un problema de bifurcación, este estará en una caja $\simeq_{E.T.P.}$, pero estas cajas están contenidas en cajas de $\sim_{P.L.}$.

Por tanto, cada deformación versal de una matriz nos da un representante canónico de la caja en $\sim_{P.L.}$.

Luego las deformaciones versales lineales de un campo determinan la caja de $\sim_{P.L.}$ en la que están las deformaciones del campo que atraviesan bifurcación. Notar que con esto no decimos que las bifurcaciones se clasifiquen de este modo, en una misma caja de $\sim_{P.L.}$ pueden convivir múltiples familias de bifurcaciones distintas. Pero sí, si no están en la misma caja de $\sim_{P.L.}$, entonces tampoco están en la misma caja de $\simeq_{E.T.P.}$.

Estudiaremos primero como ocurren las bifurcaciones de sistemas lineales de la forma:

$$\dot{x} = A_0x$$

Es inmediato ver que una deformación versal lineal es también una deformación versal de la matriz A_0 . Siempre tomaremos una deformación miniversal para utilizar la menor cantidad de parámetros en el espacio de parámetros. Por tanto, obtendremos las deformaciones miniversales de la forma:

$$\dot{x} = A(\mu)x$$

Una vez con esta deformación miniversal, ella será el representante dentro de la caja en $\sim_{P.L.}$.

Dentro de esta caja, utilizaremos la identificación de las deformaciones de campos no lineales verificando:

$$\dot{x} = A(\mu)x + f(x)$$

A partir de esta identificación, obtendremos un modelo para obtener algunos representantes de las cajas $\simeq_{E.T.P.}$ utilizando los monomios resonantes de la parte no lineal.

Los posibles monomios a estudiar quedan determinados por los monomios de resonancia, por tanto, estudiaremos cuál es la $A(\mu)$ -forma normal. Recordemos que si ningún monomio de hasta un grado aparece en la expansión de Taylor original, esto es, que $x_{\alpha_2}^2 e_t, x_{\alpha_3}^3 e_t, \dots, x_{\alpha_j}^j e_t$ tengan coeficiente 0 en la expansión de Taylor para todo $t \in \{1, \dots, n\}$ y $x_{\alpha}^{j+1} e_{t_0}$ tenga coeficiente $\neq 0$ para algún multi-índice α y algún $t_0 \in \{1, \dots, n\}$, entonces la $A(\mu)$ -forma normal sólo cuenta con monomios de grado mayor (Esto, debido a que en la demostración de la A -forma normal usamos la descomposición en subespacios complementarios del espacio de polinomios homogéneos de un grado, el vector nulo tiene la misma escritura como suma de nulos, luego sólo admite esa representación).

De donde empezaremos con un monomio de grado a lo menos j , con la expresión:

$$\dot{x} = A(\mu)x + x^j + \dots$$

A partir de esto, estudiaremos formas normales de la ecuación a partir de cambios de coordenadas, las cuales simplifiquen lo más posible todo el comportamiento geométrico.

Con esta clasificación inicial hemos logrado:

1. Determinar los problemas de clasificación de bifurcaciones de sistemas lineales como problemas de obtención de deformaciones miniversales
2. Determinar los problemas de obtención de bifurcaciones de sistemas no lineales (y clasificación inicial de éstos) como problemas de obtención de deformaciones miniversales y el posterior análisis de formas normales de cada caso posible de acuerdo a sus monomios de resonancia y a la obtención de éstos según su parte no lineal.

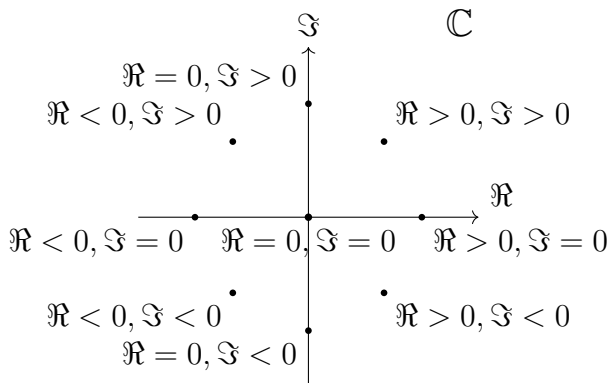
En nuestro caso, como trabajamos en \mathbb{R}^2 , la cantidad de deformaciones miniversales será menor a la totalidad de posibilidades. Sin embargo, será suficiente para clasificar las principales bifurcaciones que se presentan en este espacio.

Comentario 1.22 (Estudio de puntos de equilibrio no hiperbólicos). Recapitulando:

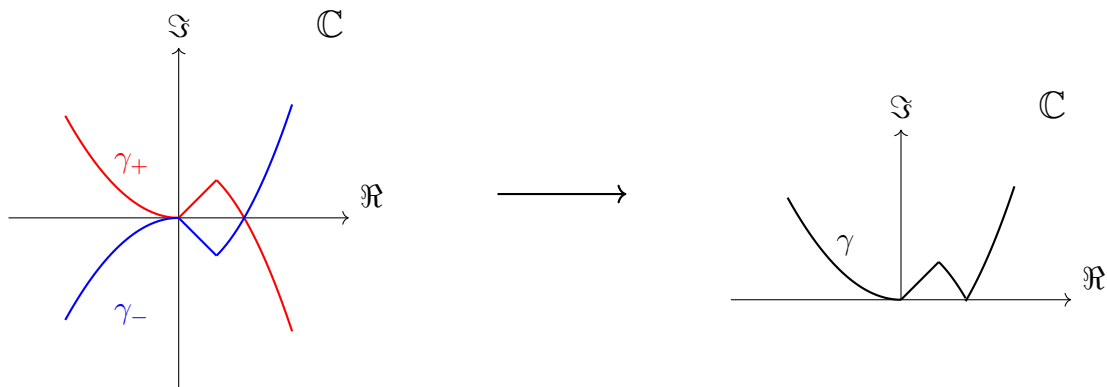
1. Nuestro principal caso de inestabilidad estructural era el considerar puntos de equilibrio no hiperbólicos, por el Teorema de Peixoto.
2. Si el punto de equilibrio x_0 es no hiperbólico para el campo X_0 , elegimos los campos que deformen la parte lineal A_{X_μ} mediante deformación miniversal.
3. Debido a que la matriz está en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ se obtienen los autovalores $\alpha(\mu) \pm \beta(\mu)i$
4. Por ser punto de equilibrio, el campo original tiene a lo menos la forma $\dot{x} = A_0x + f(x)$.

5. Por ser no hiperbólico, al menos uno de los autovalores en el origen tiene la parte real nula, es decir $\alpha(0) = 0$
6. Luego la deformación $A(\mu)$ induce a los autovalores parametrizados por $\mu \in \mathbb{R}$ o $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$. En ambos casos hay una cantidad finita de posibilidades que pueden experimentar los autovalores. Entender esta nueva clasificación nos permitirá entender mejor qué sucede a nivel estructural.

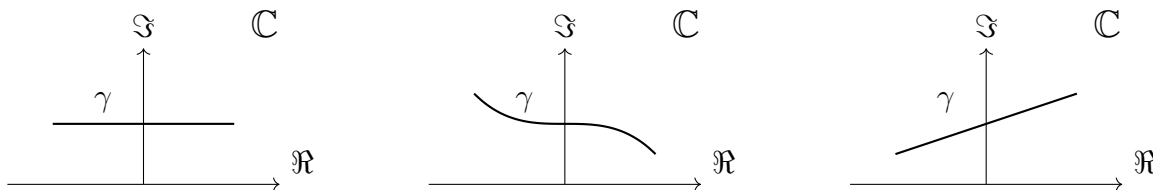
Visualización 1.23. Para lograr esto último, usaremos el siguiente diagrama:



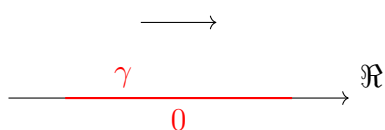
1. Recordemos que para campos no hiperbólicos, por el Teorema de la Variedad Central, basta considerar la conjugación topológica dada con la parte hiperbólica y con la parte no hiperbólica.
2. Como nuestro estudio se centra en campos bidimensionales, podemos considerar únicamente dos autovalores (De hecho, es por esto que elegimos este tema). Por autovalores conjugados, el movimiento del primero es simétrico al movimiento del segundo, en el caso de tomar $\mu \in \mathbb{R}$:



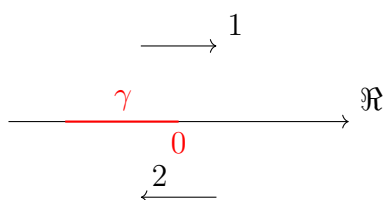
3. Si un autovalor es complejo, por ser el campo real y por polinomio característico sólo admitiendo raíces conjugadas se tiene que ambos autovalores son conjugados, luego el recorrido de los autovalores tiene que darse de forma simétrica. Por tanto, podemos estudiar campos cuya parte lineal tiene autovalores que atraviesan el eje \Im . La deformación miniversal en este caso está dada por matrices hiperbólicas en ambos lados, y una matriz no hiperbólica en el medio del eje.
4. Sean ambos autovalores reales, entonces tenemos dos casos:



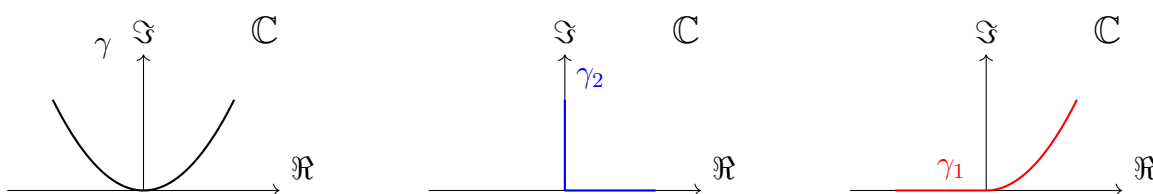
- (a) Uno sólo de los autovalores nulo, es decir, la parte no hiperbólica es unidimensional. Luego el autovalor que importa es el de la parte lineal dada por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, podemos estudiar campos cuya parte lineal atraviesa el origen por el eje \Re y la deformación miniversal debe explicar este comportamiento con matrices hiperbólicas en ambos lados de $\alpha(\mu)$ y una matriz no hiperbólica con un autovalor nulo en el origen.



Podemos también tomar una curva que llega al origen y regresa, de la siguiente forma:



- (b) Ambos autovalores nulos, luego la parte no hiperbólica es todo el campo. Además, el movimiento de ambos autovalores puede darse en cualquier dirección (de un eje al cuadrante, entre cuadrantes, entre ejes), por lo que requeriremos técnicas más complejas para el estudio de bifurcaciones de doble autovalor nulo.



5. Considerando los parámetros $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que, para Δ conexo (por ejemplo, algún bloque cerrado conteniendo al origen), como A continua en Δ , entonces $\alpha(\cdot) \pm \beta(\cdot)i$ continua en μ , entonces $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))(\Delta)$ es conexo en $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, de donde se sigue que tendremos localmente un conjunto conexo, y por propiedad de espacios euclideos, resulta en un espacio conexo por caminos, luego podemos conectar dos campos por una curva. Cada curva posible correspondiente a uno de los casos anteriores.

6. Una vez terminado de forma suficientemente satisfactoria el estudio de estos casos, daremos por concluido el capítulo.

Comentario 1.24. Procederemos con nuestro plan caracterizando las deformaciones miniversales.

Introduciremos definiciones preliminares de álgebra y grupos de Lie que no usaremos hasta más adelante.

2 Deformación Versal Lineal

Definición 2.1 (Grupos de Lie). El grupo de matrices lineales invertibles en $\mathbb{R}^{n \times n}$ denotado por $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie (subvariedad cerrada cuyos elementos actúan como un grupo, con operaciones suaves).

Definimos $gl(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie con operación corchete de Lie asociada:

$$[u, v] = uv - vu$$

para $u, v \in gl(n, \mathbb{R})$.

Definimos la acción de grupo:

$$\begin{aligned} \alpha : GL(n, \mathbb{R}) \times gl(n, \mathbb{R}) &\rightarrow gl(n, \mathbb{R}) \\ (g, u) &\mapsto gug^{-1} \end{aligned}$$

Definición 2.2 (Órbita de una matriz). Se define la órbita de una matriz como:

$$\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) := \{\alpha(g, A_0) = gA_0g^{-1} : g \in GL(n, \mathbb{R})\}$$

Proposición 2.3 ($T_{A_0}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)) = L_{A_0}(gl(n; \mathbb{R}))$). *El plano tangente a la órbita de una matriz A_0 en la matriz A_0 es la imagen del operador adjunto L_{A_0}*

Demostración. Sea $u \in gl(n, \mathbb{R})$, para $|u|$ suficientemente pequeño tenemos que la derivada de la transformación $\alpha(\cdot, A_0)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \alpha(\text{Id} + u, A_0) &= (\text{Id} + u)A_0(\text{Id} + u)^{-1} \\ &= (\text{Id} + u)A_0(\text{Id} - u + \mathcal{O}(|u|)) \\ &= A_0 + uA_0 - A_0u - \alpha(u, A_0) + \mathcal{O}(|u|) \\ &= \alpha(\text{Id}, A_0) + L_{A_0} + \mathcal{O}(|u|) \end{aligned}$$

De donde $D_1\alpha(\text{Id}, A_0) = L_{A_0} : gl(n; \mathbb{R}) \rightarrow gl(n; \mathbb{R})$, pero a su vez $D_1\alpha(\text{Id}, A_0)GL(n, \mathbb{R}) = T_{A_0}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0))$, lo cual resulta en que las imágenes de ambas transformaciones lineales son idénticas. Luego se sigue el resultado. \square

Definición 2.4 (Centralizador). Definimos el centralizador Z_{A_0} de una matriz como el núcleo de la adjunta.

Corolario 2.5 ($\text{codim}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)) = \dim Z_{A_0}$). *La codimensión de la órbita de la matriz es la dimensión del centralizador de la matriz*

Demostración. Basta aprovechar la dimensión de los espacios vectoriales ya conocidos:

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) &= \dim \operatorname{Im}(L_{A_0}) + \dim \operatorname{Ker}(L_{A_0}) \\ &= \dim T_{A_0}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)) + \dim Z_{A_0} \\ &= \dim \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) + \dim Z_{A_0} \\ \Rightarrow \operatorname{codim} \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) &= \dim Z_{A_0} \end{aligned}$$

□

Corolario 2.6 ($V \pitchfork_{\operatorname{Id}} Z_{A_0} \Rightarrow T_{A_0} \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) = L_{A_0}(T_{\operatorname{Id}} V)$). Si $V \leq GL(n; \mathbb{R})$ es subvariedad transversal a Z_{A_0} en la identidad Id , entonces el plano tangente a la órbita de una matriz en la matriz $T_{A_0} \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)$ es la imagen bajo la adjunta de la matriz del plano tangente de la subvariedad en la identidad $L_{A_0}(T_{\operatorname{Id}} V)$.

Demostración. Por la transversalidad de V :

$$\begin{aligned} T_{\operatorname{Id}} V + T_{\operatorname{Id}} Z_{A_0} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) &\Rightarrow \forall A \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \exists B \in T_{\operatorname{Id}} V, C \in T_{\operatorname{Id}} Z_{A_0} : A = B + C \\ &\Rightarrow L_{A_0} A = [A, A_0] = [B, A_0] + [C, A_0] \\ &\Rightarrow L_{A_0} A = [B, A_0] \\ &\Rightarrow L_{A_0}(T_{\operatorname{Id}} V) = L_{A_0}(\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})) = T_{A_0} \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) \end{aligned}$$

□

Lema 2.7 (Lema de caracterización). Sea $\left(A : \Lambda \rightarrow \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \right) \in C^1$ donde $\Lambda \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^k; \tau_{\mathbb{R}^k})}(0)$ y $V \leq GL(n; \mathbb{R})$ subvariedad verificando:

1. $A : \Lambda \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ es transversal a $\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)$ en $\lambda = 0$
2. $\operatorname{Id} \in V$
3. $V \pitchfork_{\operatorname{Id}} Z_{A_0}$
4. $\operatorname{codim}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)) = k$ y $\dim V = \dim \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)$

Entonces el mapeo de conjugación sobre V con actuando sobre $A(\Lambda)$ dado por:

$$\begin{aligned} \Phi : V \times \Lambda &\rightarrow \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \\ (v, \lambda) &\mapsto \alpha(v, A(\lambda)) = v \cdot A(\lambda) \cdot v^{-1} \end{aligned}$$

es un difeomorfismo local en una vecindad de $(\operatorname{Id}, 0) \in V \times \Lambda$

Demostración. Calculamos explícitamente las derivadas parciales del operador Φ :

$$\begin{aligned} D_1 \Phi(\operatorname{Id}, 0) &= D_1 \alpha(\operatorname{Id}, A_0) = L_{A_0} \\ D_2 \Phi(\operatorname{Id}, 0) &= DA(0) \end{aligned}$$

De donde podemos escribir:

$$D\Phi(\text{Id}, 0)(u, \mu) = L_{A_0}u + DA(0)\mu$$

Como $A \pitchfork_0 \alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)$:

$$\begin{aligned} gl(n, \mathbb{R}) &= DA(0)T_0\Lambda + T_{A_0}(\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0)) \\ &= DA(0)T_0\Lambda + L_{A_0}(T_{\text{Id}}V) \\ &= D\Phi(T_0\Lambda \times T_{\text{Id}}V) \end{aligned}$$

De donde $D\Phi : T_0\Lambda \times T_{\text{Id}}V \rightarrow gl(n, \mathbb{R})$ es sobreyectivo y como:

$$\dim gl(n, \mathbb{R}) = n^2 = \dim \Lambda \times V = \dim T_0\Lambda \times T_{\text{Id}}V$$

Tenemos que es isomorfismo, de donde es biyectivo, por tanto inyectivo y en particular se aplica el Teorema de la Función Inversa. \square

Teorema 2.8 (Caracterización de la Deformación Versal). *Una deformación $A : \Lambda \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ de una matriz A_0 es versal si sólo si $A : \Lambda \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ es transversal a la órbita $\alpha(GL(n, \mathbb{R}), A_0) \leq gl(n; \mathbb{R})$ en $\lambda = 0$*

Demostración. Sea $\lambda \in U \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^k, \tau_{\mathbb{R}^k})}(0)$.

1. (\Rightarrow) Supongamos que $A(\lambda)$ sea deformación versal. Asumiendo cualquier deformación $B(\mu)$, tenemos que es inducida según:

$$B(\mu) = C(\mu)A(\phi(\mu))(C(\mu))^{-1}$$

Derivando con respecto de la variable paramétrica:

$$\begin{aligned} DB(0) &= DC(0)A(\phi(0))(C(0))^{-1} \\ &\quad + C(0)DA(\phi(0))D\phi(0)(C(0))^{-1} \\ &\quad + C(0)A(\phi(0))D(C(0))^{-1} \\ &= DC(0)A_0 + DA(0)D\phi(0) + A_0D(C(0))^{-1} \\ &= DC(0)A_0 + DA(0)D\phi(0) - A_0(C(0))^{-1}(DC(0))(D(0))^{-1} \\ &= DC(0)A_0 + DA(0)D\phi(0) - A_0DC(0) \\ &= L_{A_0}DC(0) + DA(0)D\phi(0) \end{aligned}$$

Como $DB(0)$ es arbitrario por $B(\mu)$ arbitrario se tiene que:

$$\begin{aligned} \forall M \in gl(n; \mathbb{R}), B(\mu) &= \mu A_0 + (1 - \mu)(A_0 + M) \\ \Rightarrow M &= L_{A_0}DC(0) + DA(0)D\phi(0) \\ &\Rightarrow A|_{\phi(\Lambda)} \pitchfork_0 L_{A_0}(gl(n; \mathbb{R})) \\ &\Rightarrow A \pitchfork_0 T_{A_0}(\alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0)) \\ &\Rightarrow A \pitchfork_0 \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) \end{aligned}$$

2. (\Leftarrow) Para la recíproca, sabemos que si $A \pitchfork_0 \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0)$, entonces podemos aplicar el Lema anterior usando V subvariedad que satisfaga las condiciones 2, 3, 4 del Lema y para $\alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0)$ que cumpla la condición de codimensión.

(a) Por definición de transversalidad $DA(0)(T_0\Lambda) + T_{A_0}\alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) = gl(n; \mathbb{R})$. De donde tenemos:

$$\begin{aligned} k &= \dim \Lambda \\ &= \dim T_0\Lambda \\ &\geq \dim DA(0)(T_0\Lambda) \\ &= \text{codim } T_{A_0}\alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) \\ &= \text{codim } \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) \end{aligned}$$

(b) Supongamos $k = \text{codim } \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0)$:

- i. Sea V subvariedad de $GL(n, \mathbb{R})$ (garantizamos su existencia construyendo a partir de Id y tomando curvas transversales a Z_{A_0}) y Φ como en el Lema.
- ii. Para cualquier deformación $B : \Delta \subseteq \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ arbitraria de A_0 , denotamos:

$$\Phi^{-1}(B(\mu)) = (v_\mu, \lambda_\mu)$$

De donde podemos escribir $v_\mu = C(\mu)$ y $\lambda_\mu = \phi(\mu)$ deformación de la identidad y mapeo entre parámetros.

- A. Ambos de clase C^1 por ser componentes de la función $\Phi^{-1} \circ B$ la cual es de clase C^1 .
- B. La función está definida para $\mu \in B_{r_0}(0) \subseteq \mathbb{R}^l$ con r_0 lo suficientemente pequeño como para que $B(B_{r_0}(0)) \subseteq \Phi(U_{(\text{Id}, 0)})$ y $B_{r_0}(0) \subseteq \Lambda$, con $U_{(\text{Id}, 0)}$ dado por la aplicación del Teorema de la Función Inversa del Lema.
- C. Aprovechando la notación, tenemos que B es deformación inducida de A mediante ϕ .

(c) Supongamos que $k > \text{codim } \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) =: d$

- i. Tomemos el nuevo espacio de parámetros \mathbb{R}^d . En este caso, tenemos que $C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^k)$ determinan deformaciones de la forma $A : \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ según $A(\phi(\mu)) = A(\lambda)$.
- ii. Con esto, las deformaciones dadas por $A(\phi(\mu))$ son deformaciones inducidas de $A(\lambda)$ mediante ϕ .
- iii. Como $A(\lambda)$ cumple transversalidad, también existe algún ϕ que haga que $\tilde{A}(\mu) := A(\phi(\mu))$ cumpla transversalidad. En efecto, la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
d &= \text{codim } \alpha(GL(n; \mathbb{R}), A_0) \\
&= \dim DA(0)T_0\Lambda \\
&= \dim DA(0)D\phi(0)T_0\tilde{\Lambda} \\
&= \dim D\tilde{A}(0)T_0\tilde{\Lambda}
\end{aligned}$$

se cumple para $D\phi(0)$ inyectivo.

- iv. Luego tenemos que podemos construir la deformación \tilde{A} que cumpla el caso anterior, por tanto, es deformación versal de A_0 .
- v. Como \tilde{A} es deformación versal, toda deformación de A_0 es inducida de \tilde{A} , la cual es inducida de A . De donde toda deformación es inducida por A .

□

Comentario 2.9. Podemos considerar el cálculo de las deformaciones versales a una matriz como el cálculo de las deformaciones transversales a una órbita y por tanto a su plano tangente. Como ser transversal al espacio tangente es lo mismo que ser transversal a la imagen de la adjunta, nos bastará calcular la adjunta en coordenadas dadas por $gl(n; \mathbb{R})$ como espacio vectorial. Luego podremos calcular cuales curvas son transversales a estos espacios para finalmente obtenerlas en su expresión como matrices y por tanto como deformaciones. Todo este trabajo es desarrollado de forma algorítmica en el texto de **chow1994normal**

Corolario 2.10 (Cantidad de parámetros de Deformación Miniversal). *La cantidad de parámetros de una deformación miniversal está dada por la codimensión de la órbita de A_0 .*

Demostración. Si hay k parámetros y la codimensión es d , podemos encontrar una deformación versal con una menor cantidad de parámetros como en la última parte del Teorema. □

Comentario 2.11. Por esto, en la literatura se suele decir que la "codimensión" de una bifurcación es la cantidad de parámetros del campo

Una generalización está dada para campos arbitrarios haciendo uso del plano tangente no restringido y de gérmenes de mapeos, obteniéndose la cantidad de parámetros como la codimensión del plano tangente no restringido y se puede encontrar en **golubitsky1985singularities**

Ejemplo 2.12. Se tienen los siguientes ejemplos de deformaciones versales lineales:

1. Si el campo es unidimensional es inmediato que la única deformación versal lineal de campos no hiperbólicos es dada por $A(\lambda) = \lambda, |\lambda|, \lambda^2$ o cualquier función real de variable real con $A(0) = 0$
2. Si el campo es bidimensional y no hiperbólico, los campos no hiperbólicos son los dados por autovalor real y autovalor nulo, autovalores complejos y autovalores nulos. Tenemos los casos demostrados en el capítulo 2 de Chow. Usaremos estas deformaciones en la siguiente subsección y las asumiremos como válidas.

Definición 2.13. Una familia local $(X; x_0, \epsilon_0)$ es el germen del campo X considerado como mapeo del producto cartesiano de parámetros con espacio de fase en el punto (x_0, ϵ_0) .

Dos familias locales son equivalentes si existe un germen de un mapeo continuo $y = h(x, \epsilon)$ en el punto (x_0, ϵ_0) tal que para todo ϵ , el representante del germen $h(\cdot, \epsilon)$ es un homeomorfismo que hace $(X; x_0, \epsilon_0) \equiv_{top} (Y; y_0, \epsilon_0)$

Una familia local $(X; x_0, \epsilon_0)$ se dice una deformación versal del germen $X(\cdot, \epsilon_0)$ en el punto x_0 si toda otra familia local conteniendo el mismo germen es equivalente a una familia local inducida de $(X; x_0, \epsilon_0)$

Definición 2.14. Una deformación versal de $X(\cdot, \epsilon_0)$ campo estructuralmente inestable con cantidad minimal de parámetros m (cualquier familia local de menos parámetros no es deformación versal) se dice una bifurcación de codimensión m .

Un campo estructuralmente inestable cuya deformación versal no tenga codimensión finita se dice con codimensión infinita (toda familia local con cantidad finita de parámetros no es deformación versal de $X(\cdot, \epsilon_0)$)

Comentario 2.15. Consideraremos que un problema de bifurcación (campo parametrizado) tiene codimensión m si la cantidad minimal de parámetros que capture la estructura de nuestro interés es m .

3 Deformación Versal de Gérmenes Polinomiales

4 Sobre el Problema de Reconocimiento

5 Ejemplos de Deformaciones de Campos

Sea X_μ el campo parametrizado con punto de equilibrio en el origen dado por una deformación versal lineal del campo:

$$X_0(x) = A_0x + f(x)$$

Es decir, se tiene:

$$X_\mu(x) = A(\mu)x + f(x)$$

Donde $A(\mu)$ deformación versal de la matriz A_0 .

Ejemplo 5.1. Considerando campos unidimensionales $X : \mathbb{R} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, se tienen las siguientes formas normales:

1. Para caso $A_0 = 0 \in \mathbb{R}$, una A_0 -forma normal de la ecuación diferencial asociada al campo original de hasta orden 2 es:

$$\dot{x} = ax^2$$

donde $a \neq 0$.

Podemos efectuar el cambio de variables $x = -\frac{1}{a}y$ para obtener:

$$-\frac{1}{a}\dot{y} = a\frac{1}{a^2}y^2 \Rightarrow \dot{y} = -y^2$$

Utilizando la deformación miniversal de la matriz A_0 dada por $A(\epsilon) = \epsilon$, se tiene:

$$\dot{y} = \epsilon y - y^2$$

Este campo es una $A(\lambda)$ -forma normal de las deformaciones versales lineales de campos unidimensionales con origen punto de equilibrio no hiperbólico.

Es decir, es uno de los tantos representantes $\sim_{E.P.}$ dentro de la caja $\sim_{P.L.}$, y a su vez es representante de la caja $\sim_{P.L.}$.

2. Desarrollando a partir de la forma normal anterior, tenemos que:

$$\dot{y} = \epsilon y - y^2 = \frac{\epsilon^2}{4} - (y - \frac{\epsilon}{2})^2$$

Podemos efectuar el cambio de variables $y = z + \frac{\epsilon}{2}$ para obtener:

$$\dot{z} = \frac{\epsilon^2}{4} - z^2$$

Utilizando la biyección de $\lambda \mapsto -\frac{\epsilon^2}{4}$:

$$\dot{z} = \lambda - z^2, \lambda < 0$$

es campo parametrizado $\lambda \geq 0$ topológicamente equivalente al campo original. Análogamente para $\lambda < 0$, vemos que si el cambio de variables inicial fuera dado por $x = \frac{1}{a}y$, tendríamos la ecuación de la forma

$$\dot{z} = -\frac{\epsilon^2}{4} - z^2$$

de donde podemos obtener campo parametrizado para $\lambda < 0$.

Entonces:

$$\dot{z} = \lambda - z^2$$

es campo topológicamente equivalente al campo dado por la deformación versal $A(\lambda) = \lambda$ del campo con parte lineal $A_0 = 0$.

Este campo es una forma normal de las deformaciones versales lineales de campos uni-dimensionales con el origen un punto de equilibrio no hiperbólico.

3. Supongamos que la parte lineal del campo es $A(0) = 0 \in \mathbb{R}$ y la ecuación tiene Z_2 -simetría.

Por Teorema sobre formas normales con simetría, una $A(0)$ -forma normal del campo es dada por los monomios que tengan Z_2 -simetría, es decir, por los monomios de grado impar. De donde o la parte lineal aparece en la representación, o el menor

grado posible de coeficientes no nulos de la $A(0)$ forma normal está dada por el grado 3.

Asumamos que tengamos orden cúbico dado:

$$\dot{x} = ax^3$$

Por argumento análogo con cambio de variables $x = \pm \operatorname{sgn}(a) \frac{1}{\sqrt{|a|}}y$ y utilizando la deformación versal de la parte lineal dada por $A(\epsilon) = \epsilon$:

$$\dot{x} = \epsilon x \pm x^3$$

Luego es una forma normal de las deformaciones versales lineales de campos unidimensionales con \mathbb{Z}_2 -simetría y con el origen punto de equilibrio no hiperbólico.

Comentario 5.2. Veremos luego que el primer ejemplo tiene un comportamiento distinto al segundo, pese a que el segundo se obtenga de cambios de coordenadas del primero.

Esto se debe a que los cambios de coordenadas no son cambios de coordenadas generales que afectan a todos los parámetros, sino cambios de coordenadas parametrizados, aplicando en cada parámetro un cambio de coordenadas diferente.

Luego en la primera sección $\lambda \geq 0$ serán topológicamente equivalentes, mientras que en la segunda sección $\lambda < 0$ también, pero los caminos de campos tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ no tienen por qué ser topológicamente equivalentes. Es decir, pueden estar en distintas cajas de $\sim_{E.P.}$, pese a estar en la misma caja de $\sim_{P.L.}$.

Para ver esto más claramente, vemos que la relación $\sim_{E.P.}$ toma algún subconjunto de Δ para determinar los cambios de coordenadas parametrizados. Luego ambas deformaciones versales lineales están en la misma caja $\sim_{P.L.}$ y de $\sim_{E.P.}$ tomando la conexión entre la primera sección y la segunda.

Ejemplo 5.3. Considerando campos bidimensionales $X : \mathbb{R}^2 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$, se tienen las siguientes formas normales:

1. Sea el caso $A(0) = J(0, b) = R_\omega \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con $b > 0$.

Una $A(0)$ -forma normal de orden 3 está dada por:

$$\dot{x} = J(0, b)x + \|x\|^2 J(a, b)x$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Asumiendo $a \neq 0$, una deformación miniversal de $A(0)$ está dada por:

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = A(0) + J(\lambda_1, \lambda_2) = J(\lambda_1, b + \lambda_2)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Luego la deformación versal lineal del campo queda dada por:

$$\dot{x} = J(\lambda_1, b + \lambda_2)x + \|x\|^2 J(a, b)x$$

Utilizando el cambio de coordenadas dado por $x(t) = y(t(b + \lambda_2)) = y \circ h$ con $h(t) = t(b + \lambda_2)$ resulta en la ecuación:

$$y \circ h(t) = \dot{y}(h(t))h'(t) = (b + \lambda_2)\dot{y}(h(t)) = J(\lambda_1, b + \lambda_2)y(h(t)) + \|y(h(t))\|^2 J(a, b)y(h(t))$$

De donde la ecuación toma la forma:

$$\dot{y}(h(t)) = J\left(\frac{\lambda_1}{b + \lambda_2}, 1\right)y(h(t)) + \frac{1}{b + \lambda_2}\|x\|^2 J(a, b)y(h(t))$$

De donde, tomando el re-escalamiento de tiempo dado por $h(t)$ (posible por ser mapeo lineal), tenemos:

$$\dot{y}(t) = J\left(\frac{\lambda_1}{b + \lambda_2}, 1\right)y(t) + \frac{1}{b + \lambda_2}\|x\|^2 J(a, b)y(t)$$

Finalmente, renombrando el parámetro $\lambda(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{b + \lambda_2}$:

$$\dot{y}(t) = J(\lambda, 1)y(t) + \frac{1}{b + \lambda_2}\|x\|^2 J(a, b)y(t)$$

De donde resulta que el último campo es forma normal de las deformaciones versal lineales dadas por $A(\lambda_1, \lambda_2) = J(\lambda_1, b + \lambda_2)$ del campo $A(0) = J(0, b)$.

2. Sea el caso $A(0) = N_2 \in \mathbb{R}^2$. Una $A(0)$ -forma normal de hasta orden 2 está dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = ax^2 + bxy \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Supondremos que $a \cdot b \neq 0$.

Una deformación miniversal de A_0 es dada por:

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

De donde la ecuación queda de la forma:

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ax^2 + bxy \end{pmatrix}$$

o también:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \lambda_1 x + \lambda_2 y + ax^2 + bxy \end{cases}$$

Podemos realizar el cambio de variable $(x, y) = (z - \frac{\lambda_1}{2a}, y)$ para obtener la ecuación:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \lambda_1(z - \frac{\lambda_1}{2a}) + \lambda_2 y + a(z - \frac{\lambda_1}{2a})^2 + b(z - \frac{\lambda_1}{2a})y \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \lambda_1 z - \frac{\lambda_1^2}{2a} + \lambda_2 y + az^2 - az\frac{\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_1^2}{4a} + bzy - \frac{b\lambda_1}{2a}y \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = -\frac{\lambda_1^2}{4a} + (\lambda_2 - \frac{b\lambda_1}{2a})y + az^2 + bzy \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego podemos renombrar los parámetros según $\mu_1 = -\frac{\lambda_1^2}{4a}$, $\mu_2 = \lambda_2 - \frac{b\lambda_1}{2a}$, obteniendo:

$$D \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ az^2 + bzy \end{pmatrix}$$

O equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + az^2 + bzy \end{cases}$$

Para $\text{sgn}(\mu_1) = \text{sgn}(a)$ y $\mu_2 \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, si tomamos el cambio de variable $(x, y) = (-z, -w)$:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -\dot{z} = -w \\ -\dot{w} = -\lambda_1 z - \lambda_2 w + a(-z)^2 + b(-z)(-w) \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \dot{z} = w \\ \dot{w} = \lambda_1 z + \lambda_2 w - az^2 + b zw \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \dot{z} = w \\ \dot{w} = \lambda_1 z + \lambda_2 w + (-a)z^2 + b zw \end{cases}
\end{aligned}$$

El cual tiene la misma forma que la anterior, luego μ_1 por cambio de variable anterior puede repetirse en este nuevo campo, obteniendo que la forma normal de la deformación versal lineal es válida para $\mu_1 \in \mathbb{R}$

Luego podemos reescribir el campo como:

$$\begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + az^2 + bzy \end{cases}$$

Podemos definir los cambios de variable $(z, y) = (\frac{a}{b^2}Z, \frac{|a|}{|b|^3}Y)$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{a}{b^2} \dot{Z} = \frac{|a|}{|b|^3} Y \\ \frac{|a|}{|b|^3} \dot{Y} = \mu_1 + \mu_2 \frac{|a|}{|b|^3} Y + \left(\frac{a}{b^2}\right)^2 a Z^2 + \frac{|a|}{|b|^3} \frac{a}{b^2} b ZY \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{Z} = \frac{|a|}{|b|} Y \\ \dot{Y} = \frac{|b|^3}{|a|} \mu_1 + \mu_2 Y + \frac{|a|}{|b|} Z^2 + \frac{a}{b} ZY \end{cases} \end{aligned}$$

Escalando por el factor $h(t) = \frac{|a|}{|b|} t$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{|a|}{|b|} \dot{Z}(h(t)) = \frac{|a|}{|b|} Y(h(t)) \\ \frac{|a|}{|b|} \dot{Y}(h(t)) = \frac{|b|^3}{|a|} \mu_1 + \mu_2 Y(h(t)) + \frac{|a|}{|b|} Z^2(h(t)) + \frac{a}{b} Z(h(t)) Y(h(t)) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{Z}(h(t)) = Y(h(t)) \\ \dot{Y}(h(t)) = \frac{b^4}{|a|^2 a} \mu_1 + \frac{|b|}{|a|} \mu_2 Y(h(t)) + Z^2(h(t)) + \operatorname{sgn}(a \cdot b) Z(h(t)) Y(h(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

De donde renombrando parámetros $\epsilon_1 = \frac{b^4}{|a|^2 a} \mu_1$, $\epsilon_2 = \frac{|b|}{|a|} \mu_2$ resulta en la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{Z} = Y \\ \dot{Y} = \epsilon_1 + \epsilon_2 Y + Z^2 + \operatorname{sgn}(a \cdot b) ZY \end{cases}$$

con $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Por la posibilidad del cambio de signo de a en la representación original, el campo adquiere la forma:

$$\begin{cases} \dot{Z} = Y \\ \dot{Y} = \epsilon_1 + \epsilon_2 Y + Z^2 \pm ZY \end{cases}$$

con $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Luego es una forma normal de la deformación versal lineal dada por $A(\lambda_1, \lambda_2)$ de campo bidimensional no hiperbólico con dos autovalores nulos, con parte lineal dada por N_2 .

- Trabajando sobre el caso anterior, podemos realizar el cambio de variables dado por $(x, y) = (z - \frac{\lambda_2}{b}, y)$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \lambda_1(z - \frac{\lambda_2}{b}) + \lambda_2 y + a(z - \frac{\lambda_2}{b})^2 + b(z - \frac{\lambda_2}{b})y \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \lambda_1 z - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{b} + \lambda_2 y + a z^2 - 2a z \frac{\lambda_2}{b} + \frac{a \lambda_2^2}{b^2} + b z y - b \frac{\lambda_2}{b} y \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = a \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{b} + (\lambda_1 - 2a \frac{\lambda_2}{b}) z + a z^2 + b z y \end{cases} \end{aligned}$$

Renombrando los parámetros según $\mu_1 = a \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{b}$, $\mu_2 = \lambda_1 - 2a \frac{\lambda_2}{b}$ tenemos:

$$\begin{cases} \dot{z} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 z + az^2 + bzy \end{cases}$$

Como en el caso anterior, efectúamos los cambios de variable dados por $(z, y) = (\frac{a}{b^2}Z, \frac{a^2}{b^3}Y)$ y el escalamiento $h(t) = \frac{a}{b}t$ para obtener:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{Z} = \frac{a}{b}Y \\ \dot{Y} = \frac{b^3}{a^2}\mu_1 + \mu_2 \frac{b}{a}Z + \frac{a}{b}Z^2 + \frac{a}{b}ZY \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \dot{Z}(h(t)) = Y(h(t)) \\ \dot{Y}(h(t)) = \frac{b^4}{a^3}\mu_1 + \mu_2 \frac{b^2}{a^2}Z(h(t)) + Z^2(h(t)) + Z(h(t))Y(h(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

Renombrando los parámetros $\epsilon_1 = \frac{b^4}{a^3}\mu_1$, $\epsilon_2 = \mu_2 \frac{b^2}{a^2}$:

$$\begin{cases} \dot{Z} = Y \\ \dot{Y} = \epsilon_1 + \epsilon_2 Z + Z^2 + ZY \end{cases}$$

Además, si tomamos el escalamiento y el cambio de variable dado por $(Z, Y) = (-Q(-t), W(-t))$:

$$\begin{cases} \dot{Q} = W \\ \dot{W} = -\epsilon_1 + \epsilon_2 Q - Q^2 - QW \end{cases}$$

Renombrando parámetro ϵ_1 por $-\epsilon_1$ y utilizando cambio de signo de a en la ecuación original, tenemos que:

$$\begin{cases} \dot{Q} = W \\ \dot{W} = \epsilon_1 + \epsilon_2 Q + Q^2 - QW \end{cases}$$

También es equivalente, de donde:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \epsilon_1 + \epsilon_2 x + x^2 \pm xy \end{cases}$$

es una forma normal de la deformación versal lineal dada por $A(\lambda)$ de la ecuación con parte lineal N_2 .