

# Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026



# Índice

<b>1</b>	<b>Reducción de Lyapunov-Schmidt</b>	<b>1</b>
1	Generalización Silla-Nodo . . . . .	1
1.1	Diagrama de Newton . . . . .	1
1.2	Lyapunov- Schmidt . . . . .	5
1.3	Capitulos Anteriores de L-S . . . . .	7
1.4	Lyapunov-Schmidt General . . . . .	7
1.5	Silla-Nodo Chicone . . . . .	23



# Capítulo 1

## Ramificaciones

### 1 Anillos Locales

### 2 Diagrama de Newton

Acá discutimos brevemente cómo solucionar problemas de bifurcación de ecuaciones funcionales determinadas por funciones analíticas (En particular, funciones polinomiales).

**Definición 2.1** (Polígono de Newton). Sea  $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$  un polinomio. El polígono de Newton está dado por la envolvente convexa (dentro del primer cuadrante) dada por los vértices cuyas coordenadas son los índices de los coeficientes no nulos y por todos los puntos que superen a cada coordenada.

Es decir, que si asumimos la forma  $f(x, y) = \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r y^s$ , entonces el polígono de Newton está dado por:

$$\mathcal{N}(f) := \text{conv} \left( \left\{ (r, s) \in \mathbb{N}^2 : a_{r,s} \neq 0 \right\} \cup \bigcup_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq r) \vee (y \geq s) \right\} \right) \\ - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 0) \vee (y = 0) \right\}$$

**Corolario 2.2** (Lados del polígono de Newton). 1. Es inmediato ver que todos los puntos racionales en una recta del borde del polígono de Newton pueden escribirse como:

$$\exists a, b \in \mathbb{N}, k > 0 : \mathcal{L}[(r_0, s_0), (r_0 + ka, s_0 - kb)] \wedge \text{M. C. D.}(a, b) = 1$$

*Esto es debido a que  $(r_0 + ka, s_0 - kb) - (r_0, s_0) = k(a, -b)$ , es decir, que la recta tiene pendiente negativa hacia abajo y ambos valores  $a, b$  son naturales inducidos a partir del factor común de cualquier pendiente racional dada (la pendiente de cualquier recta que conecta vértices racionales es racional).*

2. Puntos en el lado descrito en el ítem anterior, cuyas coordenadas son enteros, están dados por  $(r_0 + la, s_0 - lb)$  para  $0 \leq l \leq k$ .

**Teorema 2.3** (Teorema Formal de Newton-Puiseux). *Cualquier ecuación  $f(x, y) = 0$  para  $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$  con término constante nulo admite a lo menos una solución en series de potencias formales dada por:*

$$\begin{aligned} x &= t^n \\ y &= \sum_{r=1}^{\infty} a_r t^r \end{aligned}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  algún natural

*Demostración.* 1. Asumamos la forma de  $f(x, y) = \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r y^s$

2. Tomemos el primer candidato, para  $\alpha \in \mathbb{Q}$ :

$$y_0 = c_0 x^\alpha + \sum_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} c_\beta x^\beta$$

Substituyendo en  $f(x, y)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r y_0^s \\ &= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r \left( c_0 x^\alpha + \sum_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} c_\beta x^\beta \right)^s \\ &= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r \left( \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} c_0^j x^{\alpha j} \left( \sum_{\alpha < \beta \in \mathbb{Q}} c_\beta x^\beta \right)^{s-j} \right) \\ &= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x^r \left( c_0^s x^{s\alpha} + \sum_{s\alpha < \gamma \in \mathbb{Q}} d_\gamma x^\gamma \right) \end{aligned}$$

3. De donde obtenemos la forma:

$$f(x, y_0) = \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} \left( a_{r,s} c_0^s x^{r+s\alpha} + \sum_{r+s\alpha < \theta \in \mathbb{Q}} e_\theta x^\theta \right)$$

Buscamos que los términos de orden  $C = r + s\alpha$  mínimo se anulen. Podemos escribir.

4. Utilizamos el polígono de Newton para obtener un  $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ , el cual es la pendiente dada por el comentario anterior sobre  $(r_0 + la, s_0 - lb)$  puntos que describen el lugar geométrico de puntos de la recta dada por  $r + s\alpha = \frac{C'}{b} =: C$  (Renombrando  $C'$  en lugar de  $C$  para conveniencia de cálculo), cuyas coordenadas son enteras. De donde tenemos:

$$f(x, y_0) = \left( \sum_{l=1}^k a_{r_0+la, s_0-lb} c_0^{s_0-lb} \right) x^C + \sum_{C < \theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^\theta$$

Donde  $C = br_0 + as_0$

5. Renombraremos los coeficientes según  $u_l = a_{r_0+la, s_0-lb}$ , además escribiremos el polinomio:

$$\phi(T) = \sum_{l=0}^k u_l T^{k-l}$$

Para describir el coeficiente de menor grado de  $f(x, y_0)$ . Es decir:

$$f(x, y_0) = c_0^{s_0-kb} \phi(c_0^b) x^C + \sum_{C < \theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^\theta$$

De esta forma, tenemos que  $u_0, u_k \neq 0$ . En efecto, si no fuera así, no formarían parte de la expresión original y si ninguno fuera no nulo, todos serían nulos, por tanto ya tendríamos que  $f(x, y_0)$  tiene orden mayor que  $C$ , lo cual terminaría el algoritmo para este caso. Luego buscamos estudiar esta forma para ambos distintos de 0 (pero no necesariamente distintos entre sí).

6. Tenemos 2 casos:

- (a) Supongamos que  $f(x, y)$  es divisible por  $x^{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0$ , es decir,  $\nexists g(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]] : f(x, y) = x^{\alpha_0} g(x, y)$ . Si así fuere, tomamos la solución dada por  $(x, y) = (0, t)$  y nos centramos en  $g(x, y)$  para hallar nuevas soluciones
- (b) Supongamos que  $f(x, y)$  no es divisible por  $x^{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0$ , es decir,  $\nexists g(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]] : f(x, y) = x^{\alpha_0} g(x, y)$  entonces:
- i. Se cumple que el polígono de Newton interseca el eje  $Y$ :

$$\mathcal{N}(f) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\} \neq \emptyset$$

En efecto, como no se anula en  $x = 0$ , tenemos que hay a lo menos un monomio "fraccionario" independiente de  $x$ , luego evaluando  $f(0, y) \neq 0$

- ii. El punto de intersección queda determinado por el orden  $m_0$  de  $f(0, y) \neq 0$ :

$$f(0, y) = t_{m_0} y^{m_0} + \sum_{m_0 < \eta \in \mathbb{Q}} t_\eta y^\eta$$

- iii. Escogemos un lado del polígono de Newton  $\mathcal{L}$  y una solución de la ecuación  $\phi(T) = 0$  (dada por ser polinomio sobre  $\mathbb{C}$ ), a partir de la cual definimos al número  $c_0 := T_0^{\frac{1}{b}}$ . Sabemos que:

$$u_k \neq 0 \Rightarrow \phi(0) \neq 0 \Rightarrow T_0 \neq 0 \Rightarrow c_0 \neq 0$$

- iv. Del ítem anterior, podemos tomar  $y_1 = c_0 x^{\frac{a}{b}}$ , el cual es una primera aproximación a una solución de  $f(x, y) = 0$ . Tomamos  $y_1 = x^{\frac{a}{b}}(c_0 + y^{(1)})$ ,  $x = x_1^b$  para hacer natural al denominador:

$$\begin{aligned}
f(x_1^b, x_1^a(c_0 + y^{(1)})) &= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} (x_1^b)^r \left( x_1^a(c_0 + y^{(1)}) \right)^s \\
&= \sum_{(r,s) \in \mathbb{N}^2} a_{r,s} x_1^{br+as} \left( c_0 + y^{(1)} \right)^s \\
&= (c_0 + y^{(1)})^{s_0 - kb} \phi((c_0 + y^{(1)})^b) x_1^C + \sum_{C < k_\theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^{k_\theta} y^{(1)q_\theta} =: f_0(x_1, y^{(1)})
\end{aligned}$$

Para  $C = br_0 + as_0$ ,  $r_\theta \in \mathbb{C}$ ;  $k_\theta, q_\theta \in \mathbb{Q}$ . La última línea está dada por sólo considerar el primer sumando de la ecuación del ítem (3) en la definición de  $\phi$ .

v. Notar que para el caso, si:

$$y^{(1)} = 0 \Rightarrow f(x_1^b, x_1^a) = f_0(x_1, 0) = c_0^{s_0 - kb} \phi(c_0^b) x_1^C + \sum_{C < k_\theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^{k_\theta} = \sum_{C < k_\theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^{k_\theta}$$

Lo cual cumple el propósito de eliminar el término de menor orden.

vi. Este caso cumple que  $f_0(x_1, y^{(1)})$  es divisible por  $x_1^C$ , obteniendo:

$$f^1(x_1, y^{(1)}) := \frac{f_0(x_1, y^{(1)})}{x_1^C} = (c_0 + y^{(1)})^{s_0 - kb} \phi((c_0 + y^{(1)})^b) + \sum_{C < k_\theta \in \mathbb{Q}} r_\theta x^{k_\theta - C} y^{q_\theta}$$

a partir del cual buscar soluciones (Ver ítem (a))

vii. Notamos que:

$$f^1(0, y^{(1)}) = (c_0 + y^{(1)})^{s_0 - kb} \phi((c_0 + y^{(1)})^b) = c_0^{s_0 - kb} \phi(c_0^b) + h(y^{(1)}) = h(y^{(1)})$$

De donde el nuevo vértice del polígono de Newton en el eje  $Y$  estará dado por el punto dado por el grado de esta expresión en  $y^{(1)}$ , la cual es no nula por la expresión del término  $h$  verificando la igualdad anterior. De donde calculamos el mínimo grado (lo denotaremos por  $\partial^{-1}$ )

$$\begin{aligned}
\partial^{-1} f^1(0, y^{(1)}) &= \partial^{-1} \left( (c_0 + y^{(1)})^{s_0 - kb} \phi((c_0 + y^{(1)})^b) \right) \\
&= \partial^{-1} \phi((c_0 + y^{(1)})^b)
\end{aligned}$$

Con lo último debido a que si  $s_0 - kb \neq 0$  entonces podemos expandir el binomio y obtener la parte que no dependa de  $y^{(1)}$  dada por  $c_0^{s_0 - kb}$ , mientras que si  $s_0 - kb = 0$  entonces directamente es constante. A partir de ahí basta tomar el hecho de que  $\partial\phi = k$  para tener que:

$$\partial^{-1} \phi((c_0 + y^{(1)})^b) \leq kb$$

Pues bastaba con extraer el término de potencia dada por elevar a la  $k$  el término resultante que contenga al monomio dado por  $y^{(1)b}$  (Resulta en término no nulo por estar solo con respecto )

viii. Definimos el vértice del ítem anterior por  $m_1$  y obtenemos la desigualdad:

$$m_1 \leq kb \leq m_0$$

Por ser  $m_0 = s_0$  vértice original sobre el eje  $Y$  y  $kb$  translación que determina el segundo vértice de la recta  $\mathcal{L}$ , de forma que por tener pendiente negativa, se tiene que  $m_0 > kb$ , para que no se anule en el diagrama.

ix. Notemos que si tomamos  $a_1, b_1$  del nuevo problema verificando  $b_1 > 1$ , entonces  $m_1 < m_0$ . En efecto, supongamos que  $m_0 = kb = m_1$  (por la desigualdad). Entonces la recta de elección del polígono de Newton está formada por una línea dada por  $s_0 - kb$  con  $s_0 = m_0$ . Esto nos dice además que la expresión original se reduce a:

$$\begin{aligned} f^1(0, y^{(1)}) &= \phi((c_0 + y^{(1)})^b) \\ &= \phi(c_0^b) + \dots + dy^{(1)bk} \\ &= \dots + dy^{(1)bk} \\ \Rightarrow f^1(0, y^{(1)}) &= \phi((c_0 + y^{(1)})^b) = dy^{(1)bk} \end{aligned}$$

Por comparación de grado en la última línea. Ahora bien, reemplazando  $z = c_0 + y^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \phi(z^b) &= d(z - c_0)^{bk} \\ &= d \sum_{j=0}^{bk} \binom{bk}{j} z^j (-c_0)^{bk-j} \\ &= d(-c_0)^{bk} + b(dk(-c_0)^{bk-j})z + \sum_{j=2}^{bk} \binom{bk}{j} z^j (-c_0)^{bk-j} \end{aligned}$$

Como  $\phi(z^b) \in \mathbb{C}[z^b]$  y el menor término dado por  $z^1$  del lado izquierdo es no nulo, resulta que  $b = 1$ . Es decir,  $m_0 = m_1 \Rightarrow b = 1$  y por tanto su recíproca, se sostiene. Cabe comentar que la constante  $d(-c_0)^{bk}$  puede ser el término independiente de  $\phi$ , sin por ello afectar en algo a las conclusiones anteriores, recordemos que puede anularse con la expansión de los otros términos dados por  $c_0$  en la expresión original

7. Repitiendo el algoritmo del ítem (6), renombrando  $a = a_0, b = b_0, f = f^0, \phi = \phi_0$  y tomando  $a_j, b_j, \phi_j, c_j$  para  $f^j$  obtenemos la secuencia de soluciones formales aproximadas:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{\frac{a_0}{b_0}} (c_0 + y^{(1)}) & x &= x_1^{b_0} \\ y^{(1)} &= y_2 = x_1^{\frac{a_1}{b_1}} (c_1 + y^{(2)}) & x_1 &= x_2^{b_1} \\ &\vdots & &\vdots \\ y^{(r-1)} &= y_r = x_{r-1}^{\frac{a_{r-1}}{b_{r-1}}} (c_{r-1} + y^{(r)}) & x_{r-1} &= x_r^{b_{r-1}} \\ y^{(r)} &= y_{r+1} = x_r^{\frac{a_r}{b_r}} (c_r + y^{(r+1)}) & x_r &= x_{r-1}^{b_r} \end{aligned}$$



Como  $\partial f(x_\infty^d, Y_r(x_\infty^d)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f(x_\infty^d, Y_r(x_\infty^d)) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

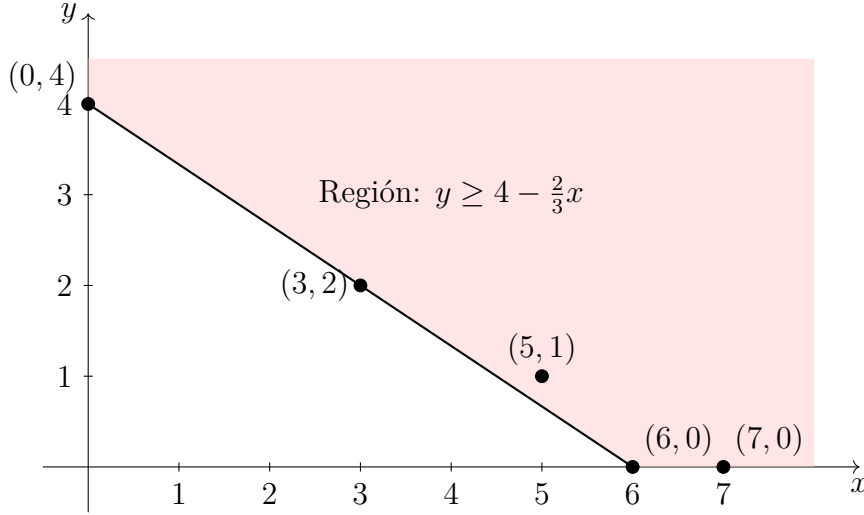
□

**Comentario 2.4.** Notar que la última parte de la demostración no es un argumento formal. Requerimos teoría de métricas  $m$ -ádicas que por extensión hemos decidido ignorar. Nos centraremos en la parte central.

**Ejemplo 2.5.** Notamos que la demostración anterior es en realidad un algoritmo. De donde podemos hallar las soluciones formales para el siguiente polinomio:

$$y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7 = 0$$

Este no es divisible por  $x$ , luego podemos proceder como en el 2do caso de la demostración. Sabemos que los puntos son dados por  $\{(0, 4); (3, 2); (5, 1); (6, 0); (7, 0)\}$ . Ahora bien, sabemos que  $(3, 2) \in \mathcal{L}[(0, 4); (6, 0)]$ , que  $(7, 0)$  está a la derecha de  $(6, 0)$  y que  $(5, 1)$  está arriba de  $\mathcal{L}[(0, 4); (6, 0)]$  ( $(5, \frac{1}{2}) \in \mathcal{L}[(0, 4); (6, 0)]$  y  $(5, 1)$  se encuentra arriba). De donde el polígono de Newton es de la forma:



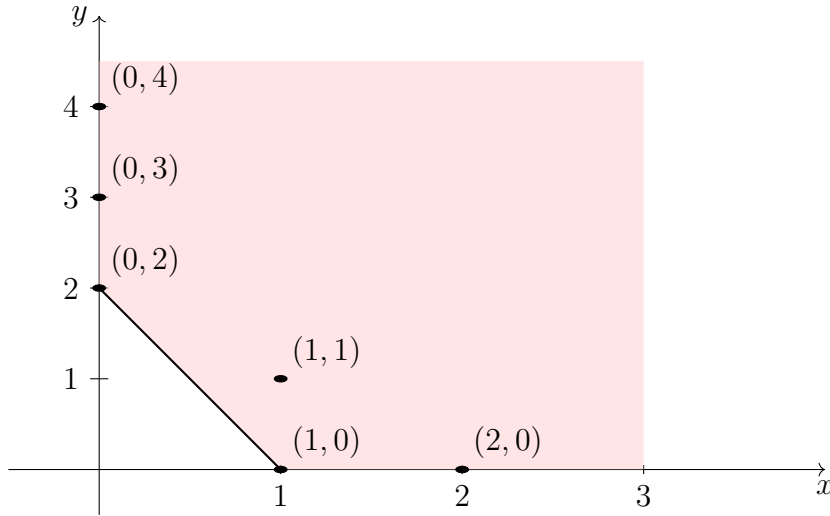
Luego obtenemos que las soluciones enteras están dadas por la recta con  $a_0 = 3, b_0 = 2$ . Sustituyendo por  $x = x_1^2, y = y_1 = x_1^3(c_0 + y^{(1)})$  obtenemos una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} & y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7 = 0 \\ \Rightarrow & x_1^{12}(c_0 + y^{(1)})^4 - 2x_1^{12}(c_0 + y^{(1)})^2 - 4x_1^{13}(c_0 + y^{(1)}) + x_1^{12} - x_1^{14} = 0 \\ \Rightarrow & x_1^{12}[(c_0 + y^{(1)})^4 - 2(c_0 + y^{(1)})^2 + 1] - 4x_1^{13}(c_0 + y^{(1)}) - x_1^{14} = 0 \\ \Rightarrow & c_0^4 + 4c_0^3y^{(1)} + 6c_0^2(y^{(1)})^2 + 4c_0(y^{(1)})^3 + (y^{(1)})^4 - 2c_0^2 - 4c_0y^{(1)} - 2(y^{(1)})^2 + 1 - 4x_1c_0 - 4x_1y^{(1)} - x_1^2 = 0 \\ \Rightarrow & (c_0^4 - 2c_0^2 + 1) + (y^{(1)})^4 + 4c_0(y^{(1)})^3 + (6c_0 - 2)(y^{(1)})^2 + (4c_0^3 - 4c_0)y^{(1)} - 4x_1y^{(1)} - 4x_1c_0 - x_1^2 = 0 \\ \Rightarrow & (c_0^2 - 1)^2 + (y^{(1)})^4 + 4c_0(y^{(1)})^3 + 2(3c_0 - 1)(y^{(1)})^2 + 4c_0(c_0^2 - 1)y^{(1)} - 4x_1(y^{(1)} + c_0) - x_1^2 = 0 \end{aligned}$$

Notamos que hemos asumido que  $x_1 \neq 0$ , lo cual es dado por  $x \neq 0$  por la no divisibilidad. Usando la elección de  $c_0^2 = 1$  dada para anular el término independiente tenemos:

$$\begin{aligned} & (y^{(1)})^4 + 4(y^{(1)})^3 + 4(y^{(1)})^2 - 4x_1y^{(1)} - 4x_1 - x_1^2 = 0 \\ & (y^{(1)})^4 - 4(y^{(1)})^3 - 8(y^{(1)})^2 - 4x_1y^{(1)} + 4x_1 - x_1^2 = 0 \end{aligned}$$

La cual tiene polígono de Newton con una recta de valores  $a_1 = 1, b_1 = 2$ :



Hacemos una factorización preliminar para el primer caso:

$$\left( (y^{(1)})^2 - x_1 \right) \left( (y^{(1)})^2 + 4y^{(1)} + 4 + x_1 \right) = 0$$

Obteniendo soluciones  $(y^{(1)})^2 = x_1, (y^{(1)})^2 + 4y^{(1)} + 4 + x_1 = 0$ . La segunda elección de  $c_0$  no es factorizable en dos polinomios cuadráticos, por lo tanto no es factorizable en  $\mathbb{R}$ . Luego una solución aproximada es dada por:

$$y = x_1^3(1 + x_1) \Rightarrow f(x_1^2, x_1^4 + x_1^5) = 0$$

Sustituyendo con las nuevas variables  $x_1 = x_2^2, y_2 = y^{(1)} = x_2(c_1 + y^{(2)})$  obtenemos una ecuación de la forma:

$$\begin{cases} (y^{(1)})^4 + 4(y^{(1)})^3 + 4(y^{(1)})^2 - 4x_1y^{(1)} - 4x_1 - x_1^2 = 0 \\ (y^{(1)})^4 - 4(y^{(1)})^3 - 8(y^{(1)})^2 - 4x_1y^{(1)} + 4x_1 - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^4(c_1 + y^{(2)})^4 + 4x_2^3(c_1 + y^{(2)})^3 + 4x_2^2(c_1 + y^{(2)})^2 - 4x_2^3(c_1 + y^{(2)}) - 4x_2^2 - x_2^4 = 0 \\ x_2^4(c_1 + y^{(2)})^4 - 4x_2^3(c_1 + y^{(2)})^3 - 8x_2^2(c_1 + y^{(2)})^2 - 4x_2^3(c_1 + y^{(2)}) + 4x_2^2 - x_2^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2^2(c_1 + y^{(2)})^4 + 4x_2(c_1 + y^{(2)})^3 + 4(c_1 + y^{(2)})^2 - 4x_2(c_1 + y^{(2)}) - 4 - x_2^2 = 0 \\ x_2^2(c_1 + y^{(2)})^4 - 4x_2(c_1 + y^{(2)})^3 - 8(c_1 + y^{(2)})^2 - 4x_2(c_1 + y^{(2)}) + 4 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Elegimos el  $c_1 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$  en cada caso respectivamente, para anular al término independiente, obteniendo:

Figure 1.1: 2 Ramas al graficar el problema numéricamente

Figure 1.2: 1era Rama dada por algoritmo | 2da Rama dada por algoritmo

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x_2^2 & (1 + 4y^{(2)} + 6(y^{(2)})^2 + 4(y^{(2)})^3 + (y^{(2)})^4) + 4x_2(1 + 3y^{(2)} + 3(y^{(2)})^2 + (y^{(2)})^3) \\ & + 4(1 + 2y^{(2)} + (y^{(2)})^2) - 4x_2(1 + y^{(2)}) - 4 - x_2^2 = 0 \\ x_2^2 & (1 + 8y^{(2)} + 6(2y^{(2)})^2 + 4(2y^{(2)})^3 + (2y^{(2)})^4) - 2 \cdot 4x_2(1 + 6y^{(2)} + 3(2y^{(2)})^2 + (2y^{(2)})^3) \\ & - 16 \cdot 8(\frac{1}{2} + y^{(2)} + (y^{(2)})^2) - 8 \cdot 4x_2(1 + 2y^{(2)}) + 64 - 16x_2^2 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} x_2^2 & (4y^{(2)} + 6(y^{(2)})^2 + 4(y^{(2)})^3 + (y^{(2)})^4) \\ & + 4x_2(2y^{(2)} + 3(y^{(2)})^2 + (y^{(2)})^3) + 4(2y^{(2)} + (y^{(2)})^2) = 0 \\ x_2^2 & (1 + 8y^{(2)} + 24(y^{(2)})^2 + 32(y^{(2)})^3 + 16(y^{(2)})^4) - 8x_2(1 + 6y^{(2)} + 4(y^{(2)})^2 + 8(y^{(2)})^3) \\ & - (128y^{(2)} + 128(y^{(2)})^2) - 32x_2(1 + 2y^{(2)}) - 16x_2^2 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} x_2^2 & y^{(2)}(4 + 6y^{(2)} + 4(y^{(2)})^2 + (y^{(2)})^3) \\ & + 4x_2y^{(2)}(2 + 3y^{(2)} + (y^{(2)})^2) + y^{(2)}(8 + y^{(2)}) = 0 \\ x_2^2 & (-15 + 8y^{(2)} + 24(y^{(2)})^2 + 32(y^{(2)})^3 + 16(y^{(2)})^4) - 8x_2(5 + 10y^{(2)} + 4(y^{(2)})^2 + 8(y^{(2)})^3) \\ & - y^{(2)}(128 + 128y^{(2)}) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vemos que la primera ecuación tiene un factor de  $x_2^2$  y un factor de  $y_2$ :

$$y^{(2)} \left( x_2^2(4 + 6y^{(2)} + 4(y^{(2)})^2 + (y^{(2)})^3) + 4x_2(2 + 3y^{(2)} + (y^{(2)})^2) + (8 + y^{(2)}) \right) = 0$$

En virtud del ítem 6.v de la demostración, una solución es dada por:

$$y^{(2)} = 0 \Rightarrow y^{(1)} = x_2 = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y = x_2^6(1 + x_2), x = x_2^4$$

Es decir, tenemos una solución dada por:

$$f(x_2^4, x_2^6 + x_2^7) = 0$$

Podemos verificar evaluando en el problema original que la expresión cumple ser solución. Asimismo, recordemos que la gráfica del problema original está dada por:

Comparando con las ramas obtenidas mediante el algoritmo del polígono, obtenemos que todas las soluciones reales han sido dadas para  $(x(t), y(t)) = (t^4, t^6 + t^7)$ . El hecho de que sean 2 soluciones se debe a que, asumiendo  $t \in \mathbb{C}$ , debemos verificar que  $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ , de donde  $t = \sqrt{x(t)}$  sólo admite 2 soluciones posibles, por ende, 2 "ramas" reales.

**Comentario 2.6.** 1. Con este teorema en mente, somos capaces de formalizar la intuición dada de las ramificaciones de los ejemplos anteriores. En efecto, siempre podremos obtener de manera formal las ramas de la forma  $(x(t), \lambda(t)) = (t^d, Y_\infty(t))$ .

2. Si queremos que sean ramas reales, debe verificarse que  $x(t), \lambda(t) \in \mathbb{R}$ . En particular, como  $t = \sqrt[d]{x(t)} = \sqrt[d]{|x(t)|} \xi^d$ , tenemos que  $t$  toma tantos valores como raíces  $d$ -ésimas de la unidad existan. Luego de manera formal, hay  $d$  ramas reales a lo sumo. La imposibilidad de algunas ramas se da según los coeficientes de  $Y_\infty$  sean reales o según  $\lambda(t)$  sea conveniente.

3. En el ejemplo anterior, las soluciones estaban dadas por las raíces caurtas de la unidad, obteniéndose la forma:

$$x(t) = t\xi_4 \in \mathbb{R}, y(t) = t^6\xi_4(1 + t\xi_4) \in \mathbb{R}$$

Como  $\xi_4 \in \{1, -1, i, -i\}$ , basta reemplazar hasta que se obtenga  $y(t) \in \mathbb{R}$

4. Con esto, ni siquiera requerimos obtener solución, basta obtener una rama aproximada y observar si coincide con nuestro modelo aplicativo.
5. El ejemplo anterior nos da la solución  $(x(t), y(t)) = (t^4, t^6 + t^7)$  al problema de bifurcación dado por:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = \lambda^4 - 2x^3\lambda^2 - 4x^5\lambda + x^6 - x^7$$

Notamos que la bifurcación tiene 2 ramas, pero no es silla nodo, pues no hay condición de transversalidad  $D_\lambda f(0, 0) = 0$ . Esto quiere decir que la bifurcación silla-nodo no es la única con la propiedad de obtener 2 ramas de soluciones.

**Corolario 2.7.** *La bifurcación Silla-Nodo, Transcrítica y Tridente tienen las ramas descritas en las proposiciones anteriores.*

*Demostración.* Basta considerar las ramas dadas por  $\mu = x^2, x, x^2$  en cada caso. entonces tenemos:

$$\begin{aligned} sn(x, x^2) &= 0 \\ transcrit(x, x) &= 0 \\ tridente(x, x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Los cuales trivialmente verifican tener 1 rama en silla-nodo al ser considerados como funciones en  $X$ , 2 ramas en transcrítica y tridente por admitir la rama  $x = 0$  debido a ser divisible por  $x$ , o 2 ramas al ser consideradas como funciones en  $\mu$ , utilizando argumento análogo sobre raíces de la unidad:

$$\begin{aligned} sn(\pm\sqrt{\mu}, \mu) &= 0 \\ transcrit(\mu, \mu) &= 0 \\ tridente(\pm\sqrt{\mu}, \mu) &= 0 \end{aligned}$$

□

**Comentario 2.8.** Con este método, no necesitamos factorizar el campo polinomial. Basta hallar ramas de soluciones y obtenemos parámetros para cada punto de equilibrio. En particular, para campos cuya primera parte de su expansión en Taylor queda determinada como en las bifurcaciones Silla-Nodo, Transcrítica y Tridente como curva, tenemos que la parte "importante" que determina las ramas queda determinada por los primeros términos del algoritmo de Newton. El mayor defecto del método es el hecho de que tengamos que verificar que la eliminación de la parte compleja se lleve a cabo para una cantidad infinita de términos de la serie. Esto es computacionalmente complicado y depende de técnicas más sofisticadas. Por ello, procederemos a caracterizar a las bifurcaciones conocidas según la técnica de reducción de Lyapunov-Schmidt.

