

Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026

Índice

1	Espacios Jet	1
1	Conceptos Previos	1
2	Contacto	6
3	Jet Euclideo	14
4	Teorema de Transversalidad de Thom	21
5	Ideales de Funciones Diferenciables	32

Capítulo 1

Reducción de Lyapunov-Schmidt

1 Generalización Silla-Nodo

Debido a las 2 naturalezas

1.1 Diagrama de Newton

Definición 1.1 (Problema de la Función Implícita). Sea $F : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ funciones suaves en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}^s, y_0 \in \mathbb{R}^q$ verificando:

$$F(x_0, y_0) = 0$$

El problema de la función implícita es el de hallar soluciones continuas $y = \varphi(x)$ verificando:

$$\begin{cases} F(x, \varphi(x)) = 0 \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

En alguna vecindad del origen (x_0, y_0)

Comentario 1.2. Podemos tomar el problema con $x_0 = 0, y_0 = 0$ debido a translación

Proposición 1.3. El P.F.I. asociado a una función $F \in C^1$ admite más de una solución para $\text{ran}(D_y F(0, 0)) = p < q$ y solución única para $\text{ran}(D_y F(0, 0)) = q < p$.

Demostración. Expresemos el problema como:

$$0 = D_x F(0, 0)x + D_y F(0, 0)y + r(x, y)$$

donde $x \in \mathbb{R}^s, y \in \mathbb{R}^q$

Sea $r = \text{ran}(D_y F(0, 0))$, separando en casos:

1. ($r = p < q$): En este caso, podemos separar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^q b_{ij}y_j = \sum_{k=1}^s a_{ik}x_k + r_i(x, y) \\
\Rightarrow \sum_{j=1}^p b_{ij}y_j &= - \sum_{j=p+1}^q b_{ij}y_j + \sum_{k=1}^s a_{ik}x_k + r_i(x, y) \\
\Rightarrow F((x_1, \dots, x_s), (y_1, \dots, y_p), (y_{p+1}, \dots, y_q)) &= 0 \\
& \Rightarrow \begin{cases} y & := (y_1, \dots, y_p) \\ y' & := (y_{p+1}, \dots, y_q) \\ x & := (x_1, \dots, x_s) \end{cases} \\
\Rightarrow \exists \psi(y', x) : F(x, \psi(x, y'), y') &= 0
\end{aligned}$$

Luego escogiendo cualquier función continua $g(x) = y'$ tenemos la solución implícita. Debido a la arbitrariedad de la elección de g hay múltiples soluciones.

2. ($r = q < p$): En este caso, basta aprovechar el Teorema de la función implícita para obtener soluciones para la primera porción del sistema. Con esto, las soluciones quedan restringidas a la región conformada por los puntos que satisfacen las relaciones dadas por las demás ecuaciones. Es decir:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_q(x, y) = 0 \\ F_{q+1}(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y) = 0 \end{array} \right. \\
& \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^q b_{1j}y_j = \sum_{k=1}^s a_{1k}x_k + r_1(x, y) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^q b_{qj}y_j = \sum_{k=1}^s a_{qk}x_k + r_q(x, y) \\ F_{q+1}(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y) = 0 \end{array} \right. \\
& \equiv \left\{ \begin{array}{l} B'y = A'x + r'(x, y)F_{q+1}(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y) = 0 \end{array} \right. \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F'(x, y) = 0F_{q+1}(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y) = 0 \end{array} \right. \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x)F_{q+1}(x, y) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, y) = 0 \end{array} \right. \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x)F_{q+1}(x, \varphi(x)) = 0 \\ \vdots \\ F_p(x, \varphi(x)) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Es decir, la solución es dada de forma única por $y = \varphi(x)$, la cual está restringida a los puntos que satisfagan la relación para el resto de ecuaciones (Dicha región a lo menos contiene al 0, luego es no vacía). Por unicidad de φ se sigue la unicidad de la solución.

□

Proposición 1.4. *El P.F.I. para $\text{ran}(D_y F(0, 0)) < \min\{p, q\}$ admite una ecuación cuyas soluciones corresponden a soluciones del P.F.I.*

Demostración. Restringiendo los primeros problemas como en el segundo caso de la demostración anterior, obtenemos:

$$(y_1, \dots, y_r) = \psi(y_{r+1}, \dots, y_q, x) = \psi(y', x)$$

Remplazando estas soluciones en las últimas ecuaciones obtenemos:

$$G(x, \psi(y', x), y') = 0$$

donde G representa a las últimas $p - r$ ecuaciones. \square

Definición 1.5 (Ecuación de Ramificación). La ecuación obtenida en la proposición anterior recibe el nombre de ecuación de ramificación.

Lema 1.6 (Ecuación de Ramificación). *Ecuación de Ramificación no tiene términos lineales ni constantes de y' . La matriz Jacobiana del sistema se anula en $(x, y') = 0$*

Teorema 1.7 (Soluciones Reducidas). *La cantidad de soluciones locales de la ecuación de ramificación es la cantidad de soluciones del problema original.*

Definición 1.8 (Pseudopolinomio). Asumamos una solución formal analítica de exponentes fraccionarios. Buscamos hallar los valores posibles de los coeficientes. Consideraremos el caso donde $F(\xi, \lambda)$ sea un pseudopolinomio en ξ . Es decir:

$$F(\xi, \lambda) = \sum_{s=0}^n F_s(\lambda) \xi^s$$

donde $F_s(\lambda) = \lambda^{\rho_s} \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} \lambda^{\frac{r}{q}}$ para $\xi, \lambda \in \mathbb{C}$ variables, $F_{rs} \in \mathbb{C}$ complejos constantes, $q \in \mathbb{Q}$, $0 < \rho_s \in \mathbb{Q}$.

Además, se supone $F_0(\lambda), F_n(\lambda) \neq 0$.

$$F_s(\lambda) \neq 0 \Rightarrow F_{0s} \neq 0$$

Luego $F_{00} \neq 0, F_{0n} \neq 0$

Definición 1.9 (Diagrama de Newton). Considerando la ecuación:

$$F(\xi, \lambda) = 0$$

dada por F pseudopolinomio en ξ , cuya solución esté dada en la forma de serie:

$$\xi = \xi_\epsilon \lambda^\epsilon + \xi_{\epsilon'} \lambda^{\epsilon'} + \xi_{\epsilon''} \lambda^{\epsilon''} + \dots$$

donde $\epsilon < \epsilon' < \dots, \xi_\epsilon \neq 0$.

De forma abreviada:

$$\xi = \xi_\epsilon \lambda^\epsilon + \iota(\lambda^\epsilon)$$

para $\lambda \rightarrow 0$

Comentario 1.10. Sustituyendo la solución formal en el problema dado por un pseudopolinomio, tenemos que los primeros términos vienen dados por:

$$F_{00} \lambda^{\rho_0} + F_{01} \xi_\epsilon \lambda^{\rho_1 + \epsilon} + F_{02} \xi_\epsilon^2 \lambda^{\rho_2 + 2\epsilon} + \dots + F_{0n} \xi_\epsilon^n \lambda^{\rho_n + n\epsilon}$$

si $F_{0j} \neq 0$

o vienen dados por:

$$F_{00} \lambda^{\rho_0} + F_{0k} \xi_\epsilon \lambda^{\rho_k + k\epsilon} + F_{0n} \xi_\epsilon^n \lambda^{\rho_n + n\epsilon}$$

si $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $F_k(\lambda) \neq 0$

Como $F_{0s} \neq 0$, los términos menores se cancelarán si al menos dos exponentes coinciden.

Colocando los exponentes iguales, encontramos todos los valores posibles de ϵ . Escogemos valores de ξ_ϵ verificando que la suma de coeficientes con términos iguales sea 0. entonces ϵ es raíz de una de las ecuaciones lineales:

$$\rho_s + s\epsilon = \rho_j + j\epsilon$$

para $s \neq j, F_s(\lambda) \neq 0, F_j(\lambda) \neq 0$

Teorema 1.11 (Orden del Polígono de Newton).

Teorema 1.12 (Común denominador Polígono de Newton).

Teorema 1.13 (Serie del polígono de Newton converge).

Teorema 1.14 (Ecuación de Ramificación).

1.2 Lyapunov- Schmidt

Comentario 1.15 (Lyapunov Schmidt). La derivada de la función desplazamiento, al ser vista como un mapeo sobre \mathbb{R}^2 tiene núcleo no trivial.

Queremos que el problema de encontrar puntos de continuación al problema de resolver una ecuación en un esp. vectorial de menor dimensión.

Definición 1.16 (Operador de Fredholm). Decimos que un operador $A : U \rightarrow V$ entre espacios Banach, acotado, de clase C^1 en el sentido de derivada dado en el preliminar.

El operador se dice que es de Fredholm si $\dim \text{Ker}(A) < \infty$, $\text{Im}(A)$ es cerrado con complemento K finito dimensional.

Definimos el índice del operador como $i(A) := \dim K - \dim \text{Ker}(A)$

Comentario 1.17. Sea $F : X \times Y \rightarrow \mathcal{B}$ un mapeo de clase C^1 tal que $F(0, 0) = 0$ donde $X \in \tau_{\mathcal{B}}, Y \in \tau_{\mathcal{E}}$ son abiertos en espacios de Banach.

Como $F \in C^1 \Rightarrow D_x F(0, 0)$ operador lineal acotado en \mathcal{B} .

Asumamos $D_x F(0, 0)$ operador de Fredholm con índice 0.

Comentario 1.18. Denotemos al núcleo por K , al rango por R , a sus subespacios complementarios por KC, RC .

Como K es finito dimensional, escogemos una base y obtenemos la base dual. Apliquemos el T. de Hahn Banach para extenderlos a todo el espacio.

Definimos una proyección del espacio a K . El rango de la proyección complementario es el complemento buscado.

Teorema 1.19. *El núcleo de un operador de Fredholm admite un subespacio complementario.*

Comentario 1.20. Hay un vecindario producto del origen en X de la forma $U \times V \subseteq K \times KC$.

Comentario 1.21. Consideramos el mapeo

$$H : U \times V \times Y \subseteq K \times KC \times Y \rightarrow R$$

$$(u, v, y) \mapsto \pi_R F(u + v, y)$$

Derivando en el origen con respecto a la variable en el conúcleo:

$$\pi_R D_x F(0, 0)|_{KC} = D_x H : KC \rightarrow R = D_x F(0, 0)\mathcal{B}$$

Luego $\pi_R D_x F(0, 0)|_{KC} = D_x F(0, 0)|_{KC}$ para todo vector en KC tomando las imágenes puntuales y considerando el rango.

Considerando F operador Fredholm, es isomorfismo por ser anulado sólo en el núcleo, y al estar tomado en la restricción del complementario, resulta inyectivo, de forma análoga e inmediata se verifica la sobreyectividad. Luego es biyectivo, continuo por ser C^1 , lineal entre Banach, luego isomorfismo.

Comentario 1.22. Puede aplicarse el T.F.Im. sobre H , podemos hallar:

$$\exists U_1 \subseteq U, Y_1 \subseteq Y, (h \in C^1(U_1 \times Y_1; KC)) :$$

$$h(0, 0) = 0 \wedge H(u, h(u, y), y) = \pi_R F(u + h(u, y), y) = 0$$

Comentario 1.23. Definimos la función reducida de Lyapunov-Schmidt asociada con F como:

$$\tilde{F} : U_1 \times Y_1 \rightarrow RC$$

$$(u, y) \mapsto \pi_{RC} F(u + h(u, y), y)$$

Por $F(0, 0) = 0 \Rightarrow \tilde{F}(0, 0) = 0$

Comentario 1.24. Si hubiera una función continua $\beta(y) \in U_1$ verificando $\beta(0) = 0$ y $\tilde{F}(\beta(y), y) = 0$. Entonces:

$$\begin{cases} \pi_{RC} F(\beta(y) + h(\beta(y), y), y) = 0, & \text{por influencia de } \beta \\ \pi_R F(\beta(y) + h(\beta(y), y), y) = 0, & \text{por influencia de } h \end{cases}$$

Luego se cumple que $F(\beta(y) + h(\beta(y), y), y) = 0$

Luego se tiene solución implícita para la variable $x = \beta(y) + h(\beta(y), y)$ cerca del origen.

Comentario 1.25. Es decir, la función L-S reducida nos da soluciones implícitas a la función original.

Comentario 1.26. Sea la derivada parcial con respecto a las variables nucleares:

$$D_u \tilde{F}(0, 0) = \pi_{RC} D_x F(0, 0)(\text{Id} + D_u h(0, 0)) : K \rightarrow RC$$

De donde obtenemos que:

$$\forall u, D_x F(0, 0)(\text{Id} + D_u h(0, 0))u \in R \Rightarrow D_u \tilde{F}(0, 0) \in \pi_{RC} R = \{0\}$$

Operador nulo.

Comentario 1.27. Si además de suponer F Fredholm, asumimos C^2 y $\tilde{F}(u, 0) = 0$:

$$\tilde{F}(u, y) = D_y \tilde{F}(u, 0)y + G(u, y)y$$

por fórmula de Taylor con resto integral. De donde, reescribiendo en términos de la ecuación del lado izquierda:

$$G(u, y) = \int_0^1 (D_y \tilde{F}(u, ty) - D_y \tilde{F}(u, y))dt$$

De donde $\tilde{F}(u, y) = (D_y \tilde{F}(u, 0) + G(u, y))y$

Comentario 1.28. Es inmediato ver que $G(u, 0) = 0$ de su representación integral.

Además:

$$D_y G(u, 0) = \int_0^1 (t D_{yy} \tilde{F}(u, 0) - D_{yy} \tilde{F}(u, 0))dt = \int_0^1 (t - 1)dt D_{yy} \tilde{F}(u, 0) = -\frac{1}{2} D_{yy} \tilde{F}(u, 0)$$

Comentario 1.29 (Función de Bifurcación Reducida). Definimos la función de bifurcación reducida como:

$$B : U_1 \rightarrow \mathbb{R}C \\ u \mapsto D_y \tilde{F}(u, 0)$$

Corolario 1.30 (Ceros simples de B). *Las raíces simples de la función de bifurcación reducida son los mismos que las raíces simples de la función $D_y \tilde{F}(u, 0) + G(u, y)$*

Demostración. ?????????????? Si son raíces simples de B entonces se anula en la función L-S reducida, luego también en la primera componente de la segunda función, luego en la segunda componente por expresión integral.

Recíprocamente, si es raíz simple en la expresión de la derecha, luego se anula ?????? □

Comentario 1.31. Si B función de bifurcación reducida tiene una raíz simple, entonces la ecuación tiene solución implícita:

$$D_y \tilde{F}(u, 0) + G(u, y) = 0$$

1.3 Capítulos Anteriores de L-S

1.4 Lyapunov-Schmidt General

Comentario 1.32. Si bien hemos logrado estudiar el caso de las bifurcaciones anteriores como bifurcaciones de codimensión 1 dadas por la parte lineal no hiperbólica de dimensión 1, para generalizar los resultados anteriores de bifurcaciones en el sentido de curvas, nos es menester introducir la técnica de reducción de Lyapunov Schmidt.

Definición 1.33 (Punto de Ramificación). Sea la ecuación funcional dada por:

$$F(x, \lambda) = 0$$

donde $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$ es operador no lineal entre espacios de Banach X, Y y $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ parámetro real en espacio de parámetros Λ dado por un intervalo abierto finito o $\Lambda = \mathbb{R}$.

El punto λ_0 se dice un punto de ramificación (o de bifurcación como ramas) de la ecuación funcional, o punto de ramificación del operador lineal asociado F si:

$$\forall \epsilon > 0, \delta > 0, \exists (x, \lambda) \in X \times \Lambda : \left((F(x, \lambda) = 0) \wedge (0 < \|x - x_0(\lambda)\| < \epsilon) \wedge (|\lambda - \lambda_0| < \delta) \right)$$

donde $x_0(\lambda)$ es cualquier solución asociada al valor λ .

Comentario 1.34. En otras palabras, la definición anterior nos indica que, para un intervalo arbitrariamente pequeño $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ del punto de ramificación λ_0 (como parámetro), hay parámetros y soluciones asociadas (λ, x) tal que cualquier solución asociada a λ $x_0(\lambda)$ (no necesariamente x) está arbitrariamente cerca de x .

Visualización 1.35. Tomemos 3 curvas formadas por soluciones para la ecuación funcional con $X = \mathbb{R}$ y $\Lambda \in \tau_{\mathbb{R}}$.

El punto será punto de ramificación si:

Definición 1.36 (Rama). Decimos que la función continua

$$\begin{aligned} x : \Lambda \cap \mathbb{R}^+ &\rightarrow Y \\ \lambda &\mapsto x(\lambda) \end{aligned}$$

es una rama positiva de la ecuación funcional si:

1. $F(x(\lambda), \lambda) = 0$
2. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} x(\lambda) = x_0(\lambda_0)$

Análogamente, una rama negativa está definida para \mathbb{R}^-

Comentario 1.37. Los beneficios del método del análisis de ramificaciones es la posibilidad de reducir problemas de bifurcaciones según sus propiedades topológicas (Análisis del campo), algebraicas (estructura de Jordan), variacionales (extremo condicional).

Proposición 1.38. *Hay un cambio de variables que transforma las ramas en ramas sobre el origen. Es decir, que reduce el problema a:*

$$F(0, \lambda) = 0$$

Demostración. Basta considerar el cambio de variable dado por $x = x_0(\lambda) + u$:

$$F(x, \lambda) = F(x_0(\lambda) + u, \lambda) =: G(u, \lambda)$$

De donde una solución dada por $u = 0$ es solución para la ecuación funcional original y además, tomando $u_0(\lambda) = 0$, tenemos:

$$G(0, \lambda) = 0$$

de donde es solución dada para ramificación □

Definición 1.39 (Operador de Fredholm). Un operador $T : X \rightarrow Y$ lineal acotado entre espacios de Banach es un operador de Fredholm acotado o Φ -operador acotado si:

1. T es normalmente soluble, es decir si para la ecuación no homogénea:

$$Tx = h \tag{1.1}$$

alguna de las condiciones se cumple:

- (a) La ecuación $Tx = h$ es resoluble para cualquier $h \in Y$. Es decir:

$$\forall h \in Y, \exists x_0 \in X : Tx_0 = h$$

- (b) Hay un subespacio no trivial de funcionales en Y^* verificando que todo vector h que admite solución en la ecuación no homogénea es anulado por esos funcionales. Es decir:

$$\exists \text{Ker}^*(T) := \{\psi \in Y^* : \forall h \in Y, \left((\exists x_0 \in X : Tx_0 = h) \Rightarrow \langle h, \psi \rangle = \psi(h) = 0 \right)\} \neq \{0\}$$

El subespacio así descrito recibiendo el nombre de la deficiencia del operador T , sus elementos los funcionales de defieincia de T . También puede escribirse como:

$$\text{Ker}^*(T) = \{\psi \in Y^* : \text{Ker}(\psi) \text{ admite sol. en parte no homogénea}\}$$

2. La dimensión del núcleo es la dimensión de la deficiencia:

$$\alpha(T) := \dim \text{Ker}(T) = \dim \text{Ker}^*(T) =: \beta(T) < \infty$$

Además, la última de éstas dimensionaes $\dim \text{Ker}^*(T)$ se llama índice de deficiencia de Y .

El conjunto de operadores de Fredholm se denotará por $\Phi(X, Y)$

Comentario 1.40. Tomando las bases:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Ker}(A_0)} &= \{\varphi_i\}_{i=1}^n \\ \beta_{\text{Ker}^*(A_0)} &= \{\psi_i\}_{i=1}^n \end{aligned}$$

Se tiene que la solución de la ecuación homogénea está dada por:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

Mientras que las condiciones para la resolubilidad de la ecuación no homogénea son dadas por:

$$\exists \langle h, \psi_i \rangle = \psi_i(h) = 0$$

Utilizaremos un corolario del T. Hahn Banach para lograr relacionarlos en soluciones generales de la ecuación

Corolario 1.41 (Existencia de Base Dual). *Dados los vectores $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, existen $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in X^*$ verificando $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \gamma_j(\varphi_i) = \delta_{i,j}$, anulándose para vectores que no estén en $\langle \{\varphi_i\}_{i=1}^n \rangle$*

Definición 1.42 (Descomposiciones de Fredholm). Sea $T : X \rightarrow Y$ operador Fredholm o Φ -operador, entonces se tomarán las siguientes proyecciones y sus descomposiciones de forma canónica:

1. Con los γ_j del corolario, obtenemos el operador proyección sobre el dual:

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \text{Ker}(T) \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle \varphi_i \end{aligned}$$

2. El operador permite la descomposición del espacio X en los subespacios:

$$X = \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(\pi)$$

donde $\text{Ker}(\pi)$ dados por:

$$x \in \text{Ker}(\pi) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle x, \gamma_i \rangle = 0$$

3. Sea hace el proceso análogo con la proyección:

$$\begin{aligned} \pi^* : Y &\rightarrow Y_n \cong \text{Ker}^*(T) \\ y &\mapsto \sum_{i=1}^n \langle y, \psi_i \rangle z_i \end{aligned}$$

donde $Y_n \leq Y$ es el subespacio isomorfo a $\text{Ker}^*(T) \leq Y^*$, el cual está garantizado por dimensión finita y por tomar los elementos $\{z_i\}_{i=1}^n$ verificando:

$$\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Denotando a Y_n por $\text{Ker}^*(T)$, obtenemos la descomposición:

$$Y = \text{Ker}^*(T) \oplus \text{Ker}(\pi^*)$$

4. Se define el operador de Schmidt:

$$\hat{T} = T|_{\text{Ker}(\pi)} : \text{Ker}(\pi) \rightarrow \text{Ker}(\pi^*)$$

Proposición 1.43 (\hat{T} es isomorfismo). *El operador \hat{T} es isomorfismo. Además, admite un operador inverso.*

Demostración. 1. \hat{T} es inyectiva:

$$x \in \text{Ker}(\hat{T}) \Rightarrow Tx = \hat{T}x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(T) (\Leftrightarrow)$$

2. Es sobreyectiva:

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker}(\pi^*) &\Rightarrow \pi^*y = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \langle y, \psi_i \rangle z_i = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle y, \psi_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \exists x_0 \in X : Tx_0 = y \\ &\Rightarrow \exists v \in \text{Ker}(T) : \hat{T}(x_0 - v) = y \\ &\Rightarrow \exists u \in \text{Ker}(\pi) : \hat{T}(u) = y \end{aligned}$$

3. Tiene inversa lineal y acotada por T. Hahn Banach. □

Corolario 1.44 (Solución de Ec. no homogénea). *La solución de la ecuación no homogénea $Tx = h$ está dada por la forma:*

$$x = \hat{T}^{-1}h + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

Definición 1.45 (Operador aproximado). Se define para $T : X \rightarrow Y$ operador de Fredholm el operador aproximado:

$$\begin{aligned} \tilde{T} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto Tx + \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i \end{aligned}$$

Lema 1.46 (Lema de Schmidt generalizado). *El operador $\Gamma = \tilde{T}^{-1}$ existe y está acotado. Además, se cumple $\det[\langle \gamma_j, \varphi_i \rangle]_{j,i}, \det([\langle \psi_i, z_k \rangle]_{i,k}) \neq 0$*

Demostración. 1. Se tiene que $\tilde{T} : X \rightarrow Y$. Considerando la ecuación:

$$\tilde{T}x = h$$

Esta ecuación es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} Tx = h - \sum_{i=1}^n \xi_i z_i \\ \xi_i = \langle x, \gamma_i \rangle \end{cases}$$

2. Aplicando los funcionales ψ_i a la primera ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(Tx) &= \psi_i(h) - \psi_i\left(\sum_{i=1}^n \xi_i z_i\right) \\
 &= \langle h, \psi_i \rangle - \sum_{i=1}^n \xi_i \langle z_i, \psi_i \rangle \\
 &= \langle h, \psi_i \rangle - \xi_i \\
 \Rightarrow 0 &= \langle h, \psi_i \rangle - \xi_i \\
 \Rightarrow \xi_i &= \langle h, \psi_i \rangle \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i z_i &= \pi^*(h)
 \end{aligned}$$

Con la nulidad del lado izquierdo dado por Tx admitiendo solución x en la ecuación $Tz = Tx$ con z la variable.

3. Se puede reescribir la ecuación utilizando:

$$Tx = (\text{Id} - \pi^*)h$$

Aplicando la solución de la ecuación no homogénea usando \hat{T} , sobre el elemento $(\text{Id} - \pi^*)h$, se tiene:

$$x = \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$$

Aplicando todas las identidades dadas anteriormente:

$$\begin{aligned}
 \langle h, \psi_k \rangle &= \xi_k \\
 &= \langle x, \gamma_k \rangle \\
 &= \langle \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h, \gamma_k \rangle + \sum_{i=1}^n c_i \langle \varphi_i, \gamma_k \rangle \\
 &= \langle \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h, \gamma_k \rangle + c_i
 \end{aligned}$$

4. Sabemos que:

$$\hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*) : Y = \text{Ker}^*(T) \oplus \text{Ker}(\pi^*) \rightarrow \text{Ker}(\pi^*) \rightarrow \text{Ker}(\pi)$$

En efecto:

$$\pi^*(\text{Id} - \pi^*) : u_1 + u_2 \mapsto u_1 - \pi^*u_1 + u_2 \mapsto \pi^*u_1 - \pi^*u_1 + \pi^*u_2 = 0$$

De donde:

$$\pi \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h = 0 \Rightarrow \langle \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h, \gamma_k \rangle = 0$$

5. Tomando la última expresión:

$$\langle h, \psi_k \rangle = \langle \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h, \gamma_k \rangle + c_i = c_i$$

De donde obtenemos que la ecuación no homogénea original:

$$\tilde{T}x = h$$

se ve reducida a:

$$x = \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h + \sum_{i=1}^n \langle h, \psi_k \rangle \varphi_i$$

Es decir, hay un elemento inverso único para el mapeo \tilde{T} . Resultando la inversa determinada explícitamente con la forma anterior:

$$\tilde{T}^{-1}h = \hat{T}^{-1}(\text{Id} - \pi^*)h + \sum_{i=1}^n \langle h, \psi_k \rangle \varphi_i$$

□

Corolario 1.47 ($\hat{T} \subseteq \tilde{T}$). *El operador \tilde{T} es extensión del operador \hat{T}*

Demostración. Tomando para $x \in \text{Ker}(\pi)$, tenemos que:

$$\tilde{T}x = Tx + \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i = Tx = \hat{T}x$$

□

Comentario 1.48. Tenemos que para Γ operador de Schmidt generalizado, podemos obtener solución del problema homogéneo dado por $\tilde{T}x = h$ dado por $x = \Gamma h$. De donde \tilde{T} es aproximación de \hat{T} por ser extensión y por expresión anterior, luego el proceso nos da una aproximación de lo que sería una solución canónica de $Tx = h$

Definición 1.49 (Operador Completamente Continuo). Un operador $V : X \rightarrow Y$ entre espacios normados se dice completamente continuo o compacto si mapea cada conjunto acotado de X a un conjunto compacto de Y . Es decir:

$$\forall B \subseteq X, [(\exists n \in \mathbb{N} : \|B\|_X \leq n) \Rightarrow (\exists K \subseteq Y : V(B) \subseteq \text{compacto})]$$

Comentario 1.50. Un operador acotado mapeo un conjunto compacto en un conjunto compacto. Entonces todo operador completamente continuo es acotado.

Es decir, la continuidad completa es más fuerte que la continuidad simple.

El operador identidad mapeo un conjunto acotado (bola abierta unitaria) en un conjunto no compacto (bola abierta unitaria).

Teorema 1.51 (Teorema de Atkinson-Nikol'skii).

Teorema 1.52 (Caracterización de $\Phi(X, Y)$). *El operador $T : X \rightarrow Y$ es un Φ -operador, u operador de Fredholm si sólo si $T = A + V$, donde A tiene inversa acotada A^{-1} y V es completamente continua*

Demostración. 1. (\Rightarrow) Recordemos que:

$$\tilde{T}x = Tx + \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i \Rightarrow Tx = \tilde{T}x + \left(- \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i \right)$$

Podemos definir $Kx := - \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i$ operador finito dimensional

2. (\Leftarrow) Por descomposición de operadores, tenemos que se cumple:

$$B = A + V \Rightarrow BA^{-1} = \text{Id} + VA^{-1}$$

De donde las ecuaciones homogénea y no homogénea quedan dadas por:

$$\begin{aligned} (\text{Id} + VA^{-1})z &= Tx = 0 \\ (\text{Id} + VA^{-1})z &= Tx = h \end{aligned}$$

donde $z = Ax \in A(X)$.

Por teoría de Riesz ??????????????, se cumple el resultado. □

Definición 1.53 (Operador K). Definimos el operador auxiliar $Kx := - \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i$ como en el teorema anterior.

Comentario 1.54. Tenemos la identidad:

$$\langle \gamma_l, \Gamma y \rangle = \sum_{i,j,k \in \{1, \dots, n\}} [\langle \gamma_j, \varphi_i \rangle]_{j,i}^{-1} [\langle \psi_i, z_k \rangle]_{i,k}^{-1} \langle \gamma_l, \varphi_i \rangle \langle \psi_k, y \rangle$$

Teorema 1.55 ($\text{Ker}^*(T) = \text{Ker}(T^*)$). *Los funcionales deficiencia $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ son las raíces del operador T^* y forman una base de $\text{Ker}(T^*)$. Es decir $\text{Ker}^*(T) = \text{Ker}(T^*)$*

Demostración. 1. Por definición de adjunta, por Tx admitiendo solución trivial x para x arbitrario:

$$\langle x, T^* \psi_i \rangle = \langle Tx, \psi_i \rangle = 0 \Rightarrow \{T^* \psi_i\}_{i=1}^n = \{0\}$$

Lo último dado por arbitrareidad de x . De donde $\beta_{\text{Ker}^*(T)} \subseteq \text{Ker}(T^*) \Rightarrow \text{Ker}^*(T) \subseteq \text{Ker}(T^*)$.

2. Para ver que genera el espacio, admitimos una raíz del operador T^* :

$$\begin{aligned}\psi \in \text{Ker}(T^*) &\Rightarrow T^*\psi = 0 \\ &\Rightarrow \theta = \psi - \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle \psi_i\end{aligned}$$

donde z_i descrito como antes.

Por la descomposición π^* , existe una representación:

$$u = Tv + \sum_{j=1}^n \zeta_j z_j$$

Usando las igualdades:

$$T^*\psi = T^*\psi_i = 0$$

podemos aplicar $\langle \cdot, \theta \rangle$ para obtener:

$$\begin{aligned}\langle u, \theta \rangle &= \langle Tv, \psi - \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle \psi_i \rangle + \sum_{j=1}^n \zeta_j \langle z_j, \psi - \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle \psi_i \rangle \\ &= \langle v, T^*\psi - \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle T^*\psi_i \rangle + \sum_{j=1}^n \zeta_j \left(\langle z_j, \psi \rangle - \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle \langle z_j, \psi_i \rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \zeta_j \left(\langle z_j, \psi \rangle - \langle z_j, \psi \rangle \right) = 0\end{aligned}$$

Por arbitrariedad de u , tenemos que $\theta = 0$, entonces todo $\psi = \sum_{i=1}^n \langle z_i, \psi \rangle \psi_i$, luego la base genera al espacio. Es decir, se logra que la base de la deficiencia sea la base del núcleo de la adjunta. De esto se deduce que son el mismo subespacio. \square

Teorema 1.56 ($\Phi^* = \Phi$). Si T es un Φ -operador, entonces T^* es un Φ -operador, con $\text{Ker}(T) = \text{Ker}^*(T^*)$ para $\alpha(T) > 0$

Demostración. Utilizando la definición de adjunta:

$$\begin{aligned}\langle x, (\tilde{T} - T)^* \chi \rangle &= \langle (\tilde{T} - T)x, \chi \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle z_i, \chi \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, \gamma_i \rangle \langle z_i, \chi \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n \langle z_i, \chi \rangle \gamma_i \right\rangle\end{aligned}$$

Se obtiene la representación del operador $(\tilde{T})^*$ como:

$$(\tilde{T})^* \chi = T^* \chi + \sum_{i=1}^n \langle z_i, \chi \rangle \gamma_i$$

De donde podemos escribir el operador adjunta como $T^* = (\tilde{T})^* + K$ donde $(\tilde{T})^*$ tiene inversa acotada Γ^* y K finito dimensional, entonces compacto. Por Teorema de Atkinson-Nikol'skii, se tiene que T^* es un Φ -operador.

Como $\text{Ker}(T) = \text{Ker}^*(T) = \text{Ker}(T^*) = \text{Ker}^*(T^*)$ se sigue el resultado. \square

Corolario 1.57. *Se cumple que la dimensión de la deficiencia es la codimensión del rango, es decir:*

$$\dim \text{Ker}^*(T) = \dim \text{Ker}(T^*) = \dim(T(X))^\perp = \text{codim } T(X)$$

Comentario 1.58. Todas los resultados pueden generalizarse sobre operadores no acotados, cerrados, densamente definidos.

Comentario 1.59. La ecuación no homogénea $T^* \chi = \omega$ tiene solución general si sólo si se cumplen las condiciones:

$$\langle \varphi_i, \omega \rangle = 0$$

y la solución no homogénea está dada por Γ^* , es decir, la solución general está dada por:

$$\chi = \Gamma^* \omega + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$$

Comentario 1.60. Sea la ecuación dada por:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Sea $T = -D_x F(0, 0)$ operador de Fredholm para $F(x, y)$. Tenemos que si T no tiene raíces, entonces es inyectiva, luego por T. Función Implícita admite curva solución.

Es decir, para campos parametrizados con derivada espacial matriz sin núcleo, se tiene que podemos hallar conjunto abierto en Λ induciendo puntos de equilibrio utilizando $x(\mu)$ en la ecuación $F(x(\mu), \mu)$.

Nos debemos fijar en el otro caso, en el que alguno de sus autovalores sea nulo (puntos de equilibrio no hiperbólicos con parte lineal de 1 autovalor 0, así como en pitchfork, silla nodo y transcítica.) Lo que es lo mismo, el primer caso de nuestro análisis de deformaciones versales 4.a.

Utilizando en la descomposición de la suma $F(u + h(u, y), y)$ para $u + v \in \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(\pi)$ dado por la descomposición original.

Puede obtenerse solución $u = \beta(y)$ con y parámetros. Luego obtenemos curva de puntos de equilibrio a partir de parámetros. Es decir, se generaliza el caso Silla-Nodo, Transcítica, Tridente, así como el de las demás bifurcaciones genéricas del mismo tipo para \mathbb{R}^n .

Definición 1.61 (Tipos de puntos). El origen se dice un punto regular de la ecuación definida por $F : X \times Y \rightarrow Z$, si existe solución única $(x(t), y(t))$.

Asimismo, si existe una vecindad suficientemente pequeña del origen en la cual la única solución está dada por $(0, 0)$, entonces el punto se dice de no continuabilidad.

So existe una vecindad en la cual hay más de una solución de la ecuación, entonces decimos que el origen es un punto de ramificación.

El punto λ_0 se dice punto de bifurcación si la translación es tiene al origen como punto de ramificación.

Comentario 1.62. A partir de ahora supondremos que $n = 1$. Además, como para \mathbb{R}^n todo operador es Fredholm, se tiene que la derivada satisface las condiciones.

$$Tx := F(x, y) - D_x F(0, 0)x = W(x, y)$$

Usando la descomposición por π, π^* .

Colocando $x = u + v$, donde:

$$\begin{aligned} u &= (\text{Id} - \pi)x \in \text{Ker}(\pi) \\ v &= \pi x \in \text{Ker}(T) \end{aligned}$$

Asimismo, aplicando \hat{T} :

$$\begin{aligned} \hat{T}u &= \hat{T}(\text{Id} - \pi)x \Rightarrow \hat{T}u = (\text{Id} - \pi^*)W(u + v, y) \\ 0 &= \hat{T}\pi x \Rightarrow 0 = \pi^*W(u + v, y) \end{aligned}$$

ecuación equivalente a:

$$Tx = W(x, y)$$

El sistema puede simplificarse a:

$$\begin{cases} \hat{T}u = W(u + v, y) \\ 0 = \pi^*W(u + v, y) \end{cases}$$

Definimos la norma del espacio de salida como la norma del espacio isomorfo producto cartesiano dado por:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\text{Ker}(\pi) \times Y} : \text{Ker}(\pi) \times Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, y) &\mapsto \|v\|_X + \|y\|_Y \end{aligned}$$

Por inyectividad del operador \hat{T} , se tiene que:

$$D_x W(u + v, y)(\cdot)e_1 = -T(\cdot) + D_x(D_x F(u + v, y))(\cdot)$$

De donde $\exists \hat{T}^{-1}$ acotada.

Entonces existe una vecindad suficientemente pequeña tal que hay una solución continua $u = u(v, y)$, con $u(0, 0) = 0$.

Sustituyendo obtenemos la ecuación de Lyapunov Schmidt reducida.:

$$\pi^*W(u(v, y) + v, y) = 0$$

Esto induce un sistema de n ecuaciones numéricas en n variables:

$$v = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$$

por estar en el núcleo de T

De donde:

$$u(v, y) = u(\xi_1, \dots, \xi_n, y)$$

Luego la ecuación de Lyapunov Schmidt puede reducirse a:

$$\begin{cases} L^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_n, y) = \left\langle W\left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y\right), \psi_1 \right\rangle = 0 \\ \vdots \\ L^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_n, y) = \left\langle W\left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y\right), \psi_n \right\rangle = 0 \end{cases}$$

Donde el sistema de n ecuaciones con n incógnitas está formado por funciones continuas para ξ_1, \dots, ξ_n y $L(0, \dots, 0, 0) = 0$.

Estas funciones son C^1 con respecto de $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$:

$$\begin{aligned} D_{\xi_l} L^{(k)}(\xi, y) &= \left\langle \sum_{l=1}^n D_x [W(u + v, y)] \left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y \right) \right. \\ &\quad \cdot D_{\xi_l} \left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y \right) (\xi, y), \psi_n \left. \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^n D_x [W(u + v, y)] \left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y \right) \right. \\ &\quad \cdot \left[Du(v, y) Dv(\xi) \xi_l + \varphi_l \right], \psi_k \left. \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^n D_x [W(u + v, y)] \left(u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, y \right) \right. \\ &\quad \cdot \left[Du(v, y) \varphi_l + \varphi_l \right], \psi_n \left. \right\rangle \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$D_x W(x, y) = D_x F(x, y) - D_x F(0, 0) \Rightarrow D_x W(0, 0) = 0$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned}
D_{\xi_l} L^{(k)}(0, 0) &= \left\langle \sum_{l=1}^n D_x [W(u + v, y)] \left(u(0, 0) + \sum_{i=1}^n 0\varphi_i, 0 \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[Du(0, 0)\varphi_l + \varphi_l \right], \psi_n \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{l=1}^n D_x W(0, 0) \cdot \left[Du(0, 0)\varphi_l + \varphi_l \right], \psi_n \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

Luego el sistema de ecuaciones tiene matriz Jacobiana nula.

Teorema 1.63 (Soluciones de ecuación L-S). *Sea $F(x, y)$ continua en x y continua diferenciable en x oara una vecindad de $(0, 0) \in X \times Y$. Sea $F(X \times Y) \subseteq Z$, $F(0, 0) = 0$ y sea el operador $T = -D_x F(0, 0)$ un Φ -operador con $\alpha(T) > 0$*

Entonces hay correspondencia entre soluciones de la ecuación original y soluciones de la ecuación de Lyapunov-Schmidt dada por $g = u(\xi_1, \dots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$

Lema 12.1

Demostración. **Lema 12.1** □

Comentario 1.64. Los casos que utilizamos de bifurcación son de clase C^∞ , entonces basta tomar funciones analíticas para el caso inicial.

Teorema 1.65 (Determinación de la función L analítica). *Supongamos:*

1. *El número de raíces del operador de Fredholm es 1*
2. *$y = \lambda \in \mathbb{R}$ parámetro numérico pequeño*
3. *$F(x, \lambda)$ es operador analítico (Entonces las soluciones de aplicar $T. F$.Implícita son analíticas), entonces ecuación de Lyapunov Schmidt cumple $L^{(k)}$ es analítica en y .*

Entonces se puede determinar de forma explícita los coeficientes de la función analítica L determinando la ecuación de Lyapunov-Schmidt

Demostración. 1. Como $y = \lambda$, entonces la ecuación de Lyapunov-Schmidt queda de la forma analítica en:

$$\begin{aligned}
L^{(k)}(\xi, y) &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \left(L_{\alpha, 0}^{(k)}(y) \xi^\alpha \right) + \sum_{|\alpha| \geq 2} \left(L_{\alpha, 0}^{(k)}(y) \xi^\alpha \right) + \sum_{|\beta| \geq 0} \left(\sum_{l=1}^{\infty} L_{\beta, l}^{(k)}(y) \xi^\beta \right) \\
&= \sum_{|\alpha| \geq 2} \left(L_{\alpha, 0}^{(k)}(y) \xi^\alpha \right) + \sum_{|\beta| \geq 0} \left(\sum_{l=1}^{\infty} L_{\beta, l}^{(k)}(y) \xi^\beta \right)
\end{aligned}$$

Por derivadas primer orden y nulo en el 0.

Para variable numérica se anula:

$$L^{(k)}(\xi, y) = \sum_{|\alpha| \geq 2} \left(L_{\alpha,0}^{(k)}(y) \xi^\alpha \right) + \sum_{|\beta| \geq 0} \left(\sum_{l=1}^{\infty} L_{\beta,l}^{(k)} \lambda^l \right) \xi^\beta$$

Como el número de raíces l.i. es 1, se reduce aún más a:

$$L^{(k)}(\xi, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(L_{k,0} \xi^k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} L_{k,l} \lambda^l \right) \xi^k = 0$$

2. Como la ecuación está dada por:

$$\begin{cases} \hat{T}x = W(x, y) + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i \\ \xi_k = \langle x, \gamma_k \rangle \end{cases}$$

Luego se tiene la forma:

$$\begin{cases} \hat{T}x = F_{01} + \sum_{i+j \geq 2} C_{i+j}^i F_{i,j} x^i \lambda^j + \xi z \\ \xi = \langle x, \gamma \rangle \end{cases}$$

donde $F_{i,j} = \frac{1}{(i+j)!} \frac{\partial^{i+j} F}{\partial x^i \partial \lambda^j}(0, 0)$

3. Buscamos una solución pequeña $x = x(\xi, \lambda)$ de la ecuación anterior de manera formal:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \lambda^j$$

cuya convergencia está garantizada para $|\xi|, |\lambda|$ suficientemente pequeños.

Sustituyendo esta forma en la ecuación del item anterior tenemos:

$$L_{i,j} = \langle x_{i,j}, \gamma \rangle$$

Con esto obtenemos los coeficientes de la serie de potencias de las funciones que determinan la ecuación de bifurcación.

4. Introducimos la notación:

$$x^{(0)}(\xi) = x(\xi, 0)$$

colocando $\lambda = 0$, obtenemos:

$$\hat{T}x^{(0)} = \sum_{l=2}^{\infty} F_{l0} [x^{(0)}]^l + \xi z$$

Usando esta ecuación, podemos obtener el valor de $x^{(0)}$ en la forma de la serie:

$$x^{(0)}(\xi) = \xi z + \sum_{l=2}^{\infty} x_k^{(0)} \xi^k$$

Por inducción, podemos verificar las fórmulas recursivas para $x_s^{(0)}$:

$$x_k^{(0)} = \sum_{k=2}^s \sum_{i_1+\dots+i_k=s} \Gamma F_{k0}(\Gamma x_{i_1}^{(0)}) \dots (\Gamma x_{i_k}^{(0)})$$

De donde se obtiene recursivamente:

$$L_{s0} = \sum_{k=2}^s \sum_{i_1+\dots+i_k=s} \langle F_{k0}(\Gamma x_{i_1}^{(0)}) \dots (\Gamma x_{i_k}^{(0)}), \psi \rangle$$

□

Comentario 1.66. A partir de lo anterior, hay 2 casos:

1. Caso degenerado: Los coeficientes de la ecuación de ramificación son 0, entonces $\xi = (x, \gamma)$ es dada de forma inmediata. Es decir, γ tiene parámetro libre en una vecindad suficientemente pequeña.
2. Caso cuasi-regular

Definición 1.67 (Función Operador). Una función operador es una función $A : I \in \tau_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ donde X, Y son espacios de Banach, la cual admite la siguiente representación:

$$A(\lambda) = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k$$

donde:

$$\begin{aligned} A_0 &= A(\lambda_0) \\ A_k &= -\frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) \end{aligned}$$

Decimos que:

1. $\lambda \in I$ es un punto regular de la función operador A si $A^{-1}(\lambda) := \left(A(\lambda) \right)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$
2. $\lambda \in I$ es un punto singular de A si $A(\lambda)$ no es continuamente invertible.
3. El punto singular λ_0 es un punto singular aislado de A si hay una vecindad $V \in \mathcal{V}_{(I, \tau_{\mathbb{R}})}(\lambda_0)$ tal que $\forall \lambda \in V, \lambda$ regular de A .
4. El punto $\lambda \in I$ es un punto de Fredholm de A si $A(\lambda)$ es un operador de Fredholm.

Definición 1.68 (Cadena de Jordan Generalizada). Decimos que los elementos $\{\varphi_i^{(k)}\}_{k=1}^{p_i}$ forman una Cadena A_0 -Jordan Generalizada (GJC) de longitud p_i , asociada a φ_i si se verifica:

1. La caracterización de los elementos de la cadena:

$$\varphi_i^{(k)} = \begin{cases} \varphi_i, & k = 1 \\ A_0 \varphi_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} A_j \varphi_i^{k-j}, & k \in \{2, \dots, p_i\} \end{cases}$$

2. Que al menos un funcional $\psi_k \in \text{Ker}^*(A_0)$ cumpla:

$$\left\langle \psi_k, \sum_{j=1}^{p_i} A_j \varphi_i^{p_i+1-j} \right\rangle \neq 0$$

Definición 1.69 (Condición de Lyapunov Schmidt). Se dice del operador no lineal $F : X \times \Lambda \rightarrow Y$ que cumple las condiciones de Lyapunov-Schmidt si:

1. F es continuo.
2. F es continuamente diferenciable con respecto de x en alguna vecindad $\Omega \in \mathcal{V}_{(X \times \Lambda, \tau_X)}(0, \lambda_0)$:

$$F(x, \lambda) = D_x F(0, \lambda)x + r(x, \lambda)$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x, \lambda)}{\|x\|} = 0, \forall \lambda \in \pi_2 \Omega$$

3. El punto λ_0 es un punto de Fredholm singular del operador $A(\lambda)$ definido por:

$$D_x F(0, \lambda) =: A(\lambda) = A_0 - \sum_{k=1}^q A_k (\lambda - \lambda_0)^k + \text{Re}(\lambda)$$

$$\text{donde } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\|\text{Re}(\lambda)\|}{|\lambda - \lambda_0|^q}$$

4. El operador $r : \Omega \rightarrow Y$ admite la siguiente representación:

$$r(x, \lambda) = \sum_{s=1}^m F_s(x, \lambda) + \text{Re}(x, \lambda)$$

$$\text{donde } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\text{Re}(x, \lambda)\|}{\|x\|^m} = 0, \forall \lambda \in \pi_2 \Omega,$$

y tomando F_s operador uniforme de orden s :

$$F_s(t, x) = t^s F_s(x, \lambda)$$

Comentario 1.70. 1. Denotaremos las bases de núcleo y del adjunto del núcleo del operador A_0 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Ker}(A_0)} &= \{\varphi_i\}_{i=1}^n \\ \beta_{\text{Ker}^*(A_0)} &= \{\psi_i\}_{i=1}^n \end{aligned}$$

2. Si el primer ítem de las condiciones de Lyapunov-Schmidt se cumple y λ_0 es un punto regular del operador $D_x F(0, \lambda)$, entonces hay solución trivial sólo en la esfera $\|x\| < \epsilon$ en $|\lambda - \lambda_0| < \delta$

Comentario 1.71. SECCIÓN 1 CAPÍTULO 2 CONSTRUYE, SECCIÓN 2 DA TEOREMAS, SECCIÓN 3 MÉTODO ANALÍTICO DE LYAPUNOV-SCHMIDT, SECCIÓN 4 ASINTÓTICAS, SECCIÓN 5 PERTURBACIÓN DE PUNTOS DE BIFURCACIÓN

Proposición 1.72. *Sea λ_0 punto de Fredholm singular del operador $D_x F(0, \lambda)$, donde F operador no lineal cumpliendo las condiciones de Lyapunov-Schmidt; Sea $\max_{i \in \mathbb{N}} p_i \leq q$, donde p_i la longitud del i -ésimo GJC del operador $D_x F(0, \lambda)$; Y sea k su número raíz.*

La ecuación puede reducirse a:

1.5 Silla-Nodo Chicone

Teorema 1.73 (Caracterización de Sotomayor de las bifurcaciones Silla-Nodo). *Sea $X_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ familia uni-parametrizada de campos vectoriales, con $X(\cdot, \mu) = X_\mu(\cdot)$.*

Supongamos que $X(x_0, \mu_0) = 0$ (dado un parámetro μ_0 , x_0 es una singularidad), que la matriz de linealización alrededor de la singularidad $A = D_x X(x_0, \mu_0)$ verifica:

1. x_0 es punto es de equilibrio para el campo X_{μ_0} , es decir:

$$X_{\mu_0}(x_0) = X(x_0, \mu_0) = 0$$

2. El núcleo de la parte lineal es unidimensional, es decir:

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : \text{Ker } D_x X(x_0, \mu_0) = \langle v \rangle$$

3. Condiciones Silla-Nodo

$$\left\{ D_\mu X(x_0, \mu_0), D_{xx} X(x_0, \mu_0)(v, v) \right\} \notin \text{Im } D_x X(x_0, \mu_0)$$

*Entonces, el campo atraviesa una bifurcación **Silla-Nodo** como curva, es decir:*

1. Hay una curva de puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned} \exists (\gamma : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \in C^1 : \\ \gamma(0) = (x_0, \mu_0) \wedge X \circ \gamma = 0 \end{aligned}$$

con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

2. La curva tiene tangencia cuadrática con $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. Es decir:

$$\begin{aligned} \gamma_2'(0) &= 0 \\ \gamma_2''(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

3. La familia de matrices $D_x X(\beta(t))$ es infinitesimalmente hiperbólica. Es decir, que para cualquier valor no nulo de t , la matriz es hiperbólica. Lo que es lo mismo, que $t = 0$ es el único valor para el cual $D_x X(\beta(t))$ es no hiperbólica.
4. Dependiendo de los signos de $\{f(D_\mu X(x_0, \mu_0)), f(D_{xx} X(x_0, \mu_0)(v, v))\}$ para algún $f \in \text{Anul}(D_x X(x_0, \mu_0)) \neq \{0\}$ (garantizado porque la representación matricial resulta en $\text{Anul}(D_x X(x_0, \mu_0)) \cong (D_x X(x_0, \mu_0))^t \cong \text{Ker}(D_x X(x_0, \mu_0)) \neq \{0\}$) se tiene la estabilidad inestabilidad de las ramas.

Además, el conjunto de campos vectoriales C^∞ satisfaciendo las condiciones del Teorema es un conjunto denso y abierto en el espacio de Banach de todos los campos vectoriales uni-parametrizados con singularidades en x_0 teniendo a 0 como autovalor simple.

Es decir, que las bifurcaciones de silla-nodo son genéricas en el sentido de que cualquier campo vectorial puede perturbarse a una bifurcación silla-nodo.

Demostración. 1. Supongamos que el origen es una silla-nodo para X_0 , que $D_x X(0, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene autovalor 0 con multiplicidad algebraica y geométrica 1. Luego el núcleo tiene un sólo generador: $\text{Ker } D_x X(0, 0) = \langle v \rangle$

Por teorema de ortogonalización existe un subespacio ortogonal K de base $\beta_K := \{k_i\}_{i=2}^n$ que verifique:

$$\begin{aligned} \exists \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto tv + \sum_{i=2}^n x_i k_i \end{aligned}$$

2. Con la notación definida como arriba, consideremos el mapa dado por la proyección:

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1} \\ (t, x, \lambda) &\mapsto \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^n} X(\phi(t, x), \lambda) \end{aligned}$$

De donde $X(0, 0) = X(\phi(0, 0), 0) = \rho(0, 0, 0)$.

De la ecuación anterior, la transformación lineal $D_x \rho(0, 0, 0) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es invertible

En efecto, derivando:

$$\begin{aligned} D_x \rho(0, 0, 0) &= D_x \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1}} X(\phi(t, x), \lambda)(0, 0, 0) \\ &= \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1}} D_x X(\phi(t, x), \lambda)(0, 0, 0) \\ &= \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1}} D_x X(\phi(0, 0), 0) D_x \phi(0, 0) \\ \Rightarrow D_x \rho(0, 0, 0) y &= \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1}} D_x X(\phi(0, 0), 0) D_x \phi(0, 0) y \\ &= \pi_{D_x X(0, 0) \mathbb{R}^{n-1}} D_x X(\phi(0, 0), 0) \phi(0, y) \end{aligned}$$

Como $\phi_x(0, 0) \mathbb{R}^{n-1} = \phi(0, \mathbb{R}^{n-1}) = \langle k_i \rangle = K$, luego es complemento ortogonal.

Además $D_x\phi(0, 0)$ es inyectiva por ser transformación de bases, luego es isomorfismo sobre su rango. Luego la composición es isomorfismo:

$$\mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{D_x\phi(0,0)} K \xrightarrow{D_xX(\phi(0,0),0)} D_xX(\phi(0,0),0)\mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\pi_{D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1}}} D_xX(\phi(0,0),0)\mathbb{R}^{n-1}$$

Lo cual equivale a $D_x\rho(0, 0, 0)$ es isomorfismo

3. Luego existe, debido al T.F.im. en una parametrización de las variables espaciales, una función dada por:

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

$$(t, \lambda) \mapsto \begin{cases} 0 & , t = \lambda = 0 \\ h(p, \lambda) : \rho(t, h(p, \lambda), \lambda) = 0 & , (t, \lambda) \neq 0 \end{cases}$$

Luego $h : (t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto h(p, \lambda) \in \mathbb{R}^n$ determina una superficie bi-dimensional en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ que anula ρ .

4. La función reducida de Lyapunov-Schmidt es:

$$\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (D_xX(0, 0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp$$

$$(t, \lambda) \mapsto \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda)$$

Si (t, λ) raíz de τ , entonces $X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) = 0$.

Tenemos que $\tau(0, 0) = \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} X(\phi(0, h(0, 0)), 0) = X(\phi(0, 0), 0) = X(0, 0) = 0$.

Calculemos el valor de $D_\lambda\tau(0, 0)$:

$$\begin{aligned} D_\lambda\tau(t, \lambda) &= D_\lambda\pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_\lambda X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \\ \Rightarrow D_\lambda\tau(0, 0) &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_\lambda X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda)(0, 0) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_xX(0, 0)[D_\lambda\phi(t, h(t, \lambda))(0, 0)] + D_\lambda X(0, 0) \right) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_xX(0, 0)[D_t\phi(0, 0)D_\lambda t(0) + D_y\phi(0, 0)D_\lambda h(0, 0)] + D_\lambda X(0, 0) \right) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_xX(0, 0)D_y\phi(0, 0)D_\lambda h(0, 0) + D_\lambda X(0, 0) \right) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_xX(0, 0)D_y\phi(0, 0)D_\lambda h(0, 0) \right) + \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_\lambda X(0, 0) \right) \\ &= \pi_{(D_xX(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_\lambda X(0, 0) \right) \end{aligned}$$

Por hipótesis, $0 \neq D_\lambda X(0,0) \notin D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1}$. Por tanto, se cumple que $\tau_\lambda(0,0) \neq 0$. De donde:

$$\begin{aligned} D_\lambda \tau(0,0) \neq 0 &\Rightarrow \exists! (\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) : (\gamma(0) = 0) \wedge (\tau(t, \gamma(t)) = 0) \\ &\Rightarrow X(\phi(t, h(t, \gamma(t))), \gamma(t)) = 0 \end{aligned}$$

Luego hemos definido una curva $(\phi(t, h(t, \gamma(t))), \gamma(t))$ la cual se anula en el campo, atravesando el punto $(x, \lambda) = (0, 0)$.

5. (SNB1) Definiendo $\beta(t) = (\phi(t, h(t, \gamma(t))), \gamma(t))$ obtenemos el resultado SNB1, esto es, que la curva es suave y está formada por puntos de equilibrio de β .
6. (SNB2) Verifiquemos que haya tangencia cuadrática:

- (a) $(\gamma(0) = 0)$: Por definición de γ , de acuerdo al T.F.Im.
- (b) $(\gamma'(0) = 0)$: Por la identidad de τ , podemos derivar:

$$\begin{aligned} \tau(t, \gamma(t)) = 0 &\Rightarrow D_t \tau(t, \gamma(t)) = 0 \\ &\Rightarrow D_t \tau(t, \gamma(t)) + D_\lambda \tau(t, \gamma(t)) D_t \gamma(t) = 0 \\ &\Rightarrow D_t \tau(t, \gamma(t)) + D_\lambda \tau(t, \gamma(t)) \gamma'(t) = 0 \\ &\Rightarrow D_t \tau(0, 0) + D_\lambda \tau(0, 0) \gamma'(0) = 0 \\ &\Rightarrow \gamma'(0) = -\frac{D_t \tau(0, 0)}{D_\lambda \tau(0, 0)} \end{aligned}$$

Recordemos que $D_\lambda \tau(0, 0) \neq 0$. Calculando de forma análoga:

$$\begin{aligned} D_t \tau(t, \lambda) &= D_t \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \\ &= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_t X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \\ &= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] \cdot (D_t h(t, \lambda)) \right) \\ &= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) \right) \\ &\Rightarrow D_t \tau(0, 0) = \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_x X(0, 0) [D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0) D_t h(0, 0)] = 0 \Rightarrow \gamma'(0) = -\frac{D_t \tau(0, 0)}{D_\lambda \tau(0, 0)} \end{aligned}$$

- (c) $(\gamma''(0) \neq 0)$: Por la identidad de τ , podemos derivar:

$$\begin{aligned} \tau(t, \gamma(t)) = 0 &\Rightarrow D_{tt} \tau(t, \gamma(t)) = 0 \\ &\Rightarrow D_t (D_t \tau(t, \gamma(t)) + D_\lambda \tau(t, \gamma(t)) D_t \gamma(t)) = 0 \\ &\Rightarrow D_{tt} \tau(t, \gamma(t)) + D_{t\lambda} \tau(t, \gamma(t)) \gamma'(t) + \left(D_{\lambda t} \tau(t, \gamma(t)) + D_{\lambda\lambda} \tau(t, \gamma(t)) \right) \gamma'(t) + D_\lambda \tau(t, \gamma(t)) \gamma''(t) = 0 \\ &\Rightarrow D_{tt} \tau(t, \gamma(t)) + D_\lambda \tau(t, \gamma(t)) \gamma''(t) = 0 \\ &\Rightarrow \gamma''(0) = -\frac{D_{tt} \tau(0, 0)}{D_\lambda \tau(0, 0)} \end{aligned}$$

Recordemos que $D_\lambda \tau(0, 0) \neq 0$. Calculando de forma análoga:

$$\begin{aligned}
D_{tt}\tau &= D_t D_t \tau(t, \lambda) \\
&= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_t \left(D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) \right. \\
&= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_{xx} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + D_{x\lambda} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \frac{d\lambda}{dt}(t) \right. \\
&\quad \left. + \left(D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_{tt} \phi(t, h(t, \lambda)) + D_{ty} \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) + D_{yt} \phi(t, h(t, \lambda)) D_t h(t, \lambda) \right) \right) \\
&= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_{xx} X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) \right. \\
&\quad \left. + D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) D_{tt} h(t, \lambda) \right) \\
\Rightarrow D_{tt}\tau(0, 0) &= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_{xx} X(0, 0) [D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0)] D_t h(0, 0) \right]^2 \\
&\quad \left. + D_x X(0, 0) D_{tt} h(0, 0) \right) \\
&= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \left(D_{xx} X(0, 0) [D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0)] D_t h(0, 0) \right)^2
\end{aligned}$$

Ahora bien, derivamos sobre la identidad $\rho(t, h(t, \lambda), \lambda)$ en la construcción de h :

$$\begin{aligned}
0 &= D_t \rho(t, h(t, \lambda), \lambda) = \pi_{D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1}} D_t X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) \\
&= \pi_{D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1}} \left(D_x X(\phi(t, h(t, \lambda)), \lambda) [D_t \phi(t, h(t, \lambda)) + D_y \phi(t, h(t, \lambda))] D_t h(t, \lambda) \right) \\
\Rightarrow 0 &= D_t \rho(t, h(t, \lambda), \lambda)(0, 0) = \pi_{D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1}} \left(D_x X(0, 0) [D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0)] D_t h(0, 0) \right) \\
&= D_x X(0, 0) [D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0)] D_t h(0, 0) \\
\Rightarrow D_t \phi(0, 0) + D_y \phi(0, 0) D_t h(0, 0) &\in \text{Ker } D_x X(0, 0)
\end{aligned}$$

Por definición de ϕ : $D_t \phi(0, 0) = v$; $D_y \phi(0, 0) D_t h(0, 0) \in \langle k_i \rangle = K \perp \text{Ker } D_x X(0, 0)$.

Por escritura única e igualdad al ser combinación lineal de la base, obtenemos que $D_t h(0, 0)$ no debería anularse bajo la t.l., (explicitamos arriba que era isomorfismo), luego es idénticamente 0

De donde se verifica:

$$0 \neq D_{xx} X(0, 0)(k, k) \notin D_x X(0, 0)\mathbb{R}^{n-1} \iff D_{tt}\tau(0, 0 \neq 0)$$

Añadiendo tal hipótesis se obtiene (SNB2)

7. (SNB3) Queremos ver que la matriz $D_x X(\beta(t))$ es infinitesimalmente hiperbólica para $t \neq 0$. Un único autovalor de la matriz atraviesa el eje imaginario con velocidad no nula en el valor $t = 0$.

Consideremos la curva $\beta(t) = (\phi(t, h(t, \gamma(t))), \gamma(t))$.

Queremos que los puntos de equilibrio en β son hiperbólicos para $t \neq 0$.

En $t = 0$, $0 \in \sigma(D_x X(\beta(t)))$.

Luego por continuidad de los autovalores, obtenemos que existe una curva de asociada al autovalor que se "hace" 0 $\lambda(t)$, con curva de autovector asociado $v(t)$ verificando:

$$\begin{cases} D_x X(\beta(t))v(t) = \lambda(t)v(t) \\ v(0) = k \end{cases}$$

Derivando la relación obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= D_x X(\beta(t))v(t) - \lambda(t)v(t) \\ \Rightarrow 0 &= D_t(D_x X(\beta(t))v(t) - \lambda(t)v(t)) \\ &= D_t(D_x X(\beta(t)))v(t) + D_x X(\beta(t))v'(t) - \lambda'(t)v(t) - \lambda(t)v'(t) \\ &= D_{xx}X(\beta(t))\beta'(t)v(t) + D_x X(\beta(t))v'(t) - \lambda'(t)v(t) - \lambda(t)v'(t) \\ \Rightarrow 0 &= D_{xx}X(0)\beta'(0)v(0) + D_x X(0)v'(0) - \lambda'(0)v(0) - \lambda(0)v'(0) \\ &= D_{xx}X(0)(k, k) + D_x X(0)v'(0) - \lambda'(0)k \\ \Rightarrow \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_{xx}X(0)(k, k) &= \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} \lambda'(0)k \\ \Rightarrow \pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} D_{xx}X(0)(k, k) &= \lambda'(0)\pi_{(D_x X(0,0)\mathbb{R}^{n-1})^\perp} k \end{aligned}$$

Por argumento en (SNB2), la parte izq. de la última ecuación no se anula, la parte derecha tampoco, pero la parte derecha es producto de escalar con vector no nulo. De donde el escalar no puede anularse, luego $\lambda'(0) \neq 0$. Es decir, los autovalores crecen/decrecen a lo largo de la curva β . Como tienen una raíz en $t = 0$, la curva cumple que le acontece un cambio de signo al atravesar $t = 0$.

Es inversible para cualquier valor por pequeño que sea $t \neq 0$, luego es infinitesimalmente hiperbólica, (Por continuidad de los autovalores, podemos elegir vecindad de tal forma que ninguno se anule en una vecindad del origen).

Las condiciones de los índices se sigue de forma inmediata a partir del argumento y las condiciones de las variedades invariantes se sigue a partir de la dimensión de los espacios invariantes. □

Comentario 1.74 (Explicación de la Demostración). Es el método de Lyapunov Schmidt, sólo que usamos $\tilde{F} := \tau$ y encontramos solución implícita con respecto del espacio de parámetros.

Proposición 1.75 (Bifurcación Silla-Nodo es bifurcación en ambos sentidos).

Comentario 1.76. Análogamente, procedemos para los demás ejemplos en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.77 (Bifurcación Transcrítica / Pitchfork).

Demostración. □