

Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026

Índice

1	Topología C^k	1
1	Topología desde seminormas	1
2	Espacio de Funciones	19
3	Topología débil	19
4	Fibrados	19
5	Equivalencia de topologías C^k	19

Capítulo 1

Espacios Jet

Queremos saber qué campos parametrizados que atraviesan un tipo de bifurcación determinada nos resultan realmente importantes o son más "probables" y pueden servirnos de "aproximación". Para ello, procederemos a desarrollar la teoría de genericidad utilizando la definición del capítulo de estabilidad estructural.

Asimismo, queremos saber si podemos interpretar qué bifurcaciones tomar como casos ejemplo para obtener "bifurcaciones cercanas" para las cuales reinterpretar nuestros modelos.

Para ello, utilizaremos el Teorema de Transversalidad de Thom y, mediante una subvariedad en el espacio de Jets, poder obtener un conjunto residual de funciones transversales. Nuestras principales referencias son [dugundji1966topology](#) [hirsch1976differential](#), [lima2008variedades](#) y [golubitsky1973stable](#).

1 Conceptos Previos

Definición 1.1 (Punto crítico en Variedades). 1. Un punto x de la variedad M se dice un punto crítico del mapeo suave $f : M \rightarrow N$ si el rango de la derivada en ese punto es menor que el máximo posible. Es decir, si:

$$\dim \text{Im}(df(x)) < \min(\dim M, \dim N)$$

donde:

$$Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

2. Equivalentemente, se dice que tiene punto crítico si la matriz Jacobiana del mapa en coordenadas locales no tiene rango maximal.
3. Definimos al conjunto de puntos críticos como:

$$\text{Crit}(f) := \{x \in M : \dim \text{Im}(df(x)) < \min(\dim M, \dim N)\}$$

Definición 1.2 (Valores Críticos). Un valor crítico de un mapeo entre variedades M, N dado por $f : M \rightarrow N$ es la imagen un punto crítico.

El conjunto de valores críticos está dado por $f(\text{Crit}(f))$

Proposición 1.3. *El conjunto de valores críticos de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por:*

$$f(\text{Crit}(f)) = \{y \in N : (\exists x \in f^{-1}(y) : f'(x) = 0)\}$$

Demostración. Basta tomar la cadena corta de igualdades:

$$\begin{aligned} f(\text{Crit}(f)) &= \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in f^{-1}(y) : \text{ran}(Df(x)) < \min\{\dim M, \dim \mathbb{R}\})\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in f^{-1}(y) : \text{ran } f'(x) < 1)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in f^{-1}(y) : \text{ran } f'(x) = 0)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in f^{-1}(y) : f'(x) = 0)\} \end{aligned}$$

□

Definición 1.4 (Medida Cero en variedades). Definimos a conjuntos $A \subseteq M$ de medida cero en variedades como aquellos que verifican:

$$\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_M, \lambda(\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)) = 0$$

donde λ es la medida de Lebesgue.

Teorema 1.5 (Teorema de Sard). *La medida del conjunto de valores críticos de un mapeo suficientemente suave es 0*

Comentario 1.6. Un mapeo puede tener como conjunto de puntos críticos uno que sea de medida positiva ($f = 0$)

Teorema 1.7 (Teorema de Sard). *Sea $y = f(x)$ con $(f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}) \in C^1([0, 1])$. Entonces $\lambda(f(\text{Crit}(f))) = 0$*

Demostración. Dividiendo $[0, 1]$ en la partición dada por $\mathcal{P}_N := \{[0, \frac{1}{N}], \dots, [\frac{N-1}{N}, 1]\}$. Seleccionamos los segmentos conteniendo puntos críticos:

$$\mathcal{S}_N := \{[a, b] \in \mathcal{P} : \text{Crit}(f) \cap [a, b] \neq \emptyset\}$$

Por Teorema de Valor Medio, se sigue que:

$$\begin{aligned} \forall [a, b] \in \mathcal{S}_N, \lambda(f([a, b])) &\leq \sup_{x, y \in [a, b]} \{|f(x) - f(y)|\} \\ &\leq \sup_{x, y, z \in [a, b]} \{|f'(z)| \cdot |x - y|\} \\ &\leq \sup_{z \in [a, b]} \{|f'(z)|\} \cdot (b - a) \\ &\leq \sup_{z \in [a, b]} \{|f'(z)|\} \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Ahora bien, se cumple que por continuidad de la derivada ($f \in C^1([0, 1])$) entonces existe una vecindad lo suficientemente pequeña de x tal que $|f'(y)| \leq \frac{C}{N}$. Es decir:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : (z \in [a, b] \in S_N \Rightarrow |f'(z)| < \epsilon)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \lambda(f([a, b])) &\leq \frac{\epsilon}{N} \\ \Rightarrow \lambda(f(\text{Crit}(f))) &\leq \bigcup_{[a, b] \in S_N} \lambda(f([a, b])) \leq N \cdot \frac{\epsilon}{N} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Lo cual cumple con la definición usual de medida cero. \square

Comentario 1.8. Puede probarse el Teorema de Sard para variedades con facilidad. Sin embargo, no haremos eso debido a la magnitud del Teorema. Nos conformaremos con enunciar que el Teorema de Sard se prueba de forma análoga al caso unidimensional mediante el cubrimiento de bloques en los cuales el rango cambie su valor. La prueba está en `lee2013smooth`

Teorema 1.9 (Teorema de Sard en Variedades). *Supongamos M^m, N^r ($m \geq r$) variedades suaves y $f : M \rightarrow N$ mapeo suave. Entonces $f(\text{Crit}(f))$ tiene medida 0 en N*

Demostración. Sea $(V, \psi) \in \mathcal{A}_N$ carta de coordenadas locales en N

Tomemos la base numerable de cartas coordenadas $\{(U_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_M$.

$$\begin{aligned} C \subseteq M \Rightarrow 0 &\geq \lambda(\psi(f(\text{Crit}(f)) \cap V)) \\ &= \lambda(\psi(f(\text{Crit}(f) \cap \bigcup U_n) \cap V)) \\ &= \lambda(\psi(\bigcup f(\text{Crit}(f) \cap U_n) \cap V)) \\ &= \lambda(\bigcup \psi(f(\text{Crit}(f) \cap U_n) \cap V)) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(\psi(f(\text{Crit}(f) \cap U_n) \cap V)) \end{aligned}$$

Como $\varphi_n : U_n \rightarrow \varphi_n(U_n)$ y $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ difeomorfismos, entonces:

$$\text{Crit}(f|_{U_n}) = \varphi_n^{-1}(\text{Crit}(\psi \circ f \circ \varphi_n^{-1}|_{\varphi_n(U_n)}))$$

Como $f : M \rightarrow N$ es mapeo suave $\Rightarrow \psi \circ f \circ \varphi_n^{-1} : \varphi_n(U_n) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ es suave. Luego por Bertini-Sard en caso euclideo:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\psi \circ f \circ \varphi_n^{-1}(\text{Crit}(\psi \circ f \circ \varphi_n^{-1}|_{\varphi_n(U_n)}))) \\ &= \lambda(\psi(f(\varphi_n^{-1}(\text{Crit}(\psi \circ f \circ \varphi_n^{-1}|_{\varphi_n(U_n)})))) \\ &= \lambda(\psi(f(\varphi_n^{-1}(\text{Crit}(f|_{U_n})))) \\ &= \lambda(\psi(f(\text{Crit}(f) \cap U_n) \cap V)) \end{aligned}$$

De donde se sigue el resultado. \square

Lema 1.10 ($([A \subseteq \mathbb{R}^n] \wedge [\lambda(A) = 0]) \Rightarrow \overline{A^c} = \mathbb{R}^n$). *El complemento de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida cero es denso en \mathbb{R}^n*

Demostración. Basta aprovechar que $\overline{A^c} = (\text{int}(A))^c$ y que $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \text{int}(A) = \emptyset \Rightarrow \overline{A^c} = \mathbb{R}^n$ \square

Teorema 1.11 (Teorema de Sard Regular). *El conjunto de valores regulares es denso.*

Demostración. Es reformulación simple del Teorema de Sard con valores regulares siendo el complemento de valores críticos con medida cero. \square

Definición 1.12 (Subvariedad). Supongamos M variedad suave con o sin frontera. Una subvariedad inmersa de M es un subconjunto $S \subseteq M$ que es una variedad en la topología inducida $\tau_S = S \cap \tau_M$ con la estructura suave con respecto de la cual $i : S \rightarrow M$ es un inmersión suave.

Subvariedades inmersas también se dicen subvariedades regulares.

Si S subvariedad inmersa de M , $\text{codim } S = \dim M - \dim S$ se llama la codimensión de S en M .

M se dice la variedad ambiente para S .

Notación 1.13. Debido a que las subvariedades inmersas dependen de que $i : S \rightarrow M$ sea inmersión suave, nos referiremos a ellas usando i .

Teorema 1.14 (Caracterización de Subvariedades). *Podemos caracterizar a las subvariedades regulares como aquellos subconjuntos $S \subseteq M$ en los que $\forall p \in S$, toda vecindad coordinada (U, ϕ) satisface que $(x^{k+1}, \dots, x^n) = (0, \dots, 0)$.*

Una carta así se dice una carta adaptada relativa a S . $\phi_S = \pi \circ \phi$ restricción de las primeras coordenadas no nulas.

Demostración. Basta tomar el Teorema de Rango constante y aprovechar que $i : S \rightarrow M$ es inmersión suave en ambos casos. \square

Definición 1.15. Dos subespacios vectoriales $U, W \leq V$ se dicen transversales si su suma es el espacio. Es decir, $V = U + W$

Definición 1.16 (Mapeo Transversal). Sea $f : A \rightarrow B$ mapeo suave entre variedades conteniendo la subvariedad C . El mapeo f se dice transversal a C en $a \in A$ o en $f(a) \in B$ si $f(a) \notin C$ o:

$$df(a)(T_a(A)) + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B$$

Equivalentemente, denotando a la subvariedad según $i : C \rightarrow B$, se dirá que f es transversal a C en $x \in C$ si:

$$\forall a \in f^{-1}(x), df(a) + di(a) : T_aA \oplus T_xC \rightarrow T_xB$$

es mapeo sobreyectivo.

Notación 1.17. Denotaremos por $f \pitchfork_x C$ a la transversalidad de f a C en x .

Proposición 1.18 (Transversalidad trivial). *Una submersión $f : A \rightarrow B$ es transversal a cualquier subvariedad $C \leq B$*

Demostración. Basta tomar:

$$df(a)(T_a(A)) + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B$$

□

Comentario 1.19. La transversalidad se interpreta como una generalización del concepto de valor regular, el cual no es nada más que la imagen de un punto cuya aproximación lineal "completa" el espacio tangente a una superficie.

Definición 1.20 (Transversalidad de mapeos). Dos mapeos $f, g \in C^k(M, N)$ se dicen transversales en $p \in N$ si:

$$\forall a \in f^{-1}(p), b \in g^{-1}(p), df(T_aM) + dg(T_bM) = T_pN$$

Proposición 1.21 (Preimagen de variedad transversal al mapeo). Si $f : A \rightarrow B$ es transversal a C , entonces $f^{-1}(C)$ es una subvariedad suave en A y su codimensión en A es la codimensión de C en B .

2 Contacto

Definición 2.1 (Métrica Riemanniana).

Definición 2.2 (Contacto de orden k). Sean $f, g \in C^k(M, N)$ funciones suaves. Se dice que g tiene contacto de orden k con f en x si

$$\rho_N(g(\xi), f(\xi)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k$$

cuando $\xi \rightarrow x$ en M .

Comentario 2.3. De forma implícita $f \sim_x^0 g \iff f(x) = g(x)$.

Proposición 2.4 (Contacto induce Relación de Equivalencia). *Se induce una relación de equivalencia de funciones que tengan contacto de orden k en x entre sí según:*

$$\forall f, g \in C^k, (f \sim_x^k g \iff \rho_N(g(\xi), f(\xi)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k)$$

Demostración. 1. (Reflexividad) Es inmediato ver que:

$$\rho_N(f(\xi), f(\xi)) = 0 \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k$$

2. (Simetría) Análogamente:

$$\rho_N(g(\xi), f(\xi)) = \rho_N(f(\xi), g(\xi)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k$$

3. (Transitividad) Usando desigualdad triangular:

$$\rho_N(f(\xi), h(\xi)) \leq \rho_N(f(\xi), g(\xi)) + \rho_N(g(\xi), h(\xi)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k + \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k = \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k$$

□

Proposición 2.5 ($\sim_x^k \Rightarrow \sim_x^{k-1}$). *Si dos funciones $f, g \in C^k(M, N)$ tienen contacto de orden k en x , entonces tienen contacto de cualquier orden menor a k en x . Es decir:*

$$f \sim_x^k g \Rightarrow f \sim_x^j g, \forall j \in \{0, \dots, k\}$$

Desmotración. Basta tomar la definición de orden asintótico:

$$\rho_N(g(\xi), f(\xi)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^j, \forall j \in \{0, \dots, k\}$$

□

Comentario 2.6. En el caso en que tomemos espacios normados, basta tomar la definición por límite:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\|f(\xi) - g(\xi)\|}{\|\xi - x\|^k} = 0 &\Rightarrow \forall j \in \{0, \dots, k\}, \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\|f(\xi) - g(\xi)\|}{\|\xi - x\|^j} = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\|f(\xi) - g(\xi)\|}{\|\xi - x\|^k} \|\xi - x\|^{k-j} \\ &= 0 \cdot \lim_{\xi \rightarrow x} \|\xi - x\|^{k-j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Definición 2.7 (Contacto de hasta orden k). Sean $f, g \in C^k(M, N)$ funciones suaves. Se dice que g tiene contacto de hasta orden k con f en x si:

1. $f \sim_x^k g$
2. $\forall j \geq k, f \not\sim_x^j g$

Denotaremos esta relación según:

$$f \simeq_x^k g \iff \left((f \sim_x^k g) \wedge (\forall j \geq k, f \not\sim_x^j g) \right)$$

Comentario 2.8. Diferenciamos contacto de **hasta** orden k con el contacto **de** orden k para mayor formalidad. En la literatura usual ambos son usados indistintamente y suele darse de forma inmediata esta distinción.

Definición 2.9 (Transversalidad en el sentido de contacto). Decimos que dos funciones son transversales en el sentido de contacto si tienen contacto de hasta orden 0.

Proposición 2.10 (Equivalencia de definición de transversalidad). *Ambas definiciones de transversalidad son equivalentes en el sentido de que las imágenes de sus derivadas son subespacios transversales del espacio suma (directa) de las imágenes de las derivadas de cada función*

Definición 2.11 (k -jet). La clase de equivalencia de mapeos suave con respecto a la relación de equivalencia de contacto de orden k en x se dice k -jet en x .

El k -jet de una función f en un punto x se denota por $j_x^k f$ y se escribe:

$$j_x^k f := \{g \in C^k : f \sim_x^k g\}$$

Proposición 2.12 (Expansión de Taylor determina jet). *Tomando $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$, el k -jet queda totalmente determinada por el polinomio de Taylor de grado k . Es decir, dos funciones están en el mismo k -jet si sólo si tienen el mismo polinomio de Taylor de grado k .*

Demostración. 1. Sabemos que como $f \in C^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, entonces por polinomio de Taylor:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - P_{f,x}^k(v)}{\|v\|^k} = 0 \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - P_{f,x}^k(\xi - x)}{\|\xi - x\|^k} = 0 \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - P_{f,x}^k(\xi - x)}{\|\xi - x\|^k} = 0$$

De donde, aplicando notación usual:

$$\rho_N(f(\xi), P_{f,x}^k(\xi - x)) \leq \mathcal{O}(\rho_M(\xi, x))^k \Rightarrow f(\xi) \sim P_{f,x}^k(\xi - x)$$

Entonces toda función tiene contacto de orden k en x con su polinomio de Taylor.

2. Verifiquemos que, en efecto:

$$P_{f,x}^k(t-x) \neq P_{g,x}^k(t-x) \Rightarrow f \not\sim_x^k g$$

(a) Sabemos que, para $f, g \in C^k$:

$$\begin{aligned} \|P_{f,x}^k(\xi - x) - P_{g,x}^k(\xi - x)\| &= \left\| \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j f(x) (\xi - x)^j - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} D^j g(x) (\xi - x)^j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) (\xi - x)^j \right\| \end{aligned}$$

(b) De donde:

$$\begin{aligned} P_{f,x}^k(\xi - x) = P_{g,x}^k(\xi - x) &\iff P_{f,x}^k(\xi - x) - P_{g,x}^k(\xi - x) = 0 \\ &\iff \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) (\xi - x)^j = 0 \end{aligned}$$

(c) Como la última función, con variable ξ , es un polinomio en términos de las componentes de ξ , se tiene que lo último se cumple si sólo si los coeficientes de cada monomio de componentes de ξ es 0, como esto sólo depende de los valores de los coeficientes en la forma dada, tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{f,x}^k(\xi - x) = P_{g,x}^k(\xi - x) &\iff \forall j \in \{0, \dots, k\}, \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) = 0 \\ &\iff \forall j \in \{0, \dots, k\}, D^j f(x) = D^j g(x) \end{aligned}$$

(d) Denotando $P_{f,x}^k(t-x), P_{g,x}^k(t-x)$ como las funciones inducidas por el polinomio de Taylor con variable t , tenemos:

$$\begin{aligned} P_{f,x}^k(t-x) \neq P_{g,x}^k(t-x) &\Rightarrow \exists j_0 \in \{0, \dots, k\} : D^{j_0} f(x) \neq D^{j_0} g(x) \\ &\Rightarrow \|P_{f,x}^k(\xi - x) - P_{g,x}^k(\xi - x)\| \\ &= \left\| \frac{\|\xi - x\|^{j_0}}{j_0!} \left(D^{j_0} f(x) - D^{j_0} g(x) \right) \frac{(\xi - x)^{j_0}}{\|\xi - x\|^{j_0}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in \{0, \dots, k\} - \{j_0\}} \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) (\xi - x)^j \right\| \end{aligned}$$

(e) Sabemos que una forma r -lineal simétrica se determina a partir de los elementos de la base. Luego:

$$\begin{aligned} \left(D^r f(x) - D^r g(x) \right) = 0 &\iff \|D^r f(x) - D^r g(x)\| = 0 \\ &\iff \|D^r f(x) - D^r g(x)\|_{\text{Symm}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} = 0 \\ &\iff \forall v^r \in (\mathbb{R}^m)^r, \left\| \left(D^r f(x) - D^r g(x) \right) (v^r) \right\| = 0 \\ &\iff \forall v^r \in (\mathbb{R}^m)^r, \left(D^r f(x) - D^r g(x) \right) (v^r) = 0 \\ \Rightarrow \left(D^r f(x) - D^r g(x) \right) \neq 0 &\iff \exists u^r \in (\mathbb{R}^m)^r : \left(D^r f(x) - D^r g(x) \right) (u^r) \neq 0 \end{aligned}$$

(f) Finalizamos aplicando en argumento anterior para obtener:

$$\begin{aligned}
P_{f,x}^k(t-x) \neq P_{g,x}^k(t-x) &\Rightarrow \|P_{f,x}^k(u_0^{j_0}) - P_{g,x}^k(u_0^{j_0})\| \\
&= \left\| \frac{\|u_0\|^{j_0}}{j_0!} \left(D^{j_0} f(x) - D^{j_0} g(x) \right) \frac{u_0^{j_0}}{\|u_0\|^{j_0}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \in \{0, \dots, k\} - \{j_0\}} \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) u_0^j \right\| \\
&= \left\| a(u_0) \|u_0\|^{j_0} + \sum_{j \in \{0, \dots, k\} - \{j_0\}} \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) u_0^j \right\|
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{j_0!} \left(D^{j_0} f(x) - D^{j_0} g(x) \right) \frac{u_0^{j_0}}{\|u_0\|^{j_0}} = a(u_0) \neq 0$ vector en función de u_0 vector que cumple condición anterior. Además, se cumple $a(tu_0) = a(u_0)$.

(g) Luego tenemos que si se tiene contacto de orden k , puede verificarse de forma explícita el cálculo de límite a partir del polinomio de Taylor asociado utilizando:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|P_{f,x}^k(tu_0^{j_0}) - P_{g,x}^k(tu_0^{j_0})\|}{\|(tu_0)^{j_0}\|} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\|(tu_0)^{j_0}\|} \left\| a(tu_0) \|tu_0\|^{j_0} + \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) \right\| \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| a(u_0) + \sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{1}{\|tu_0\|^{j_0-j}} \frac{1}{j!} \left(D^j f(x) - D^j g(x) \right) \frac{tu_0^j}{\|tu_0\|^j} \right\|
\end{aligned}$$

(h) Como para que tenga orden k , debe a lo menos tener orden $k-1$ (si tiene orden k entonces tiene orden $k-1$, por contrarecíproco, si no tiene orden $k-1$ no tiene sentido preguntarse si tiene orden k), entonces basta asumir la última sumatoria como tendiendo a 0. De donde:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|P_{f,x}^k(tu_0^{j_0}) - P_{g,x}^k(tu_0^{j_0})\|}{\|(tu_0)^{j_0}\|} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| a(u_0) + \sum_{j=0}^{j_0-1} R_j(t) \right\| \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| a(u_0) \right\| \neq 0
\end{aligned}$$

De donde se comprueba que $f \not\sim_x^k g$

□

Ejemplo 2.13. Tomemos $f(x, y) = x, g(x, y) = y - x^2$.

1. Se tiene contacto de orden 0 en $(0, 0)$:

$$f(0, 0) = 0 = 0 - 0^2 = g(0, 0)$$

2. Tomando contacto de orden 1:

(a) Expandiendo el cociente a limitar:

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x, y) - g(x, y)\|}{\|(x, y)\|^1} &= \frac{1}{\|(x, y)\|} \left(\|f(x, y) - Df(0, 0)(x, y) + Df(0, 0)(x, y) \right. \\ &\quad \left. - Dg(0, 0)(x, y) - g(x, y) + Dg(0, 0)(x, y)\| \right) \\ &= \left\| \frac{1}{\|(x, y)\|} \left(f(x, y) - Df(0, 0)(x, y) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\|(x, y)\|} \left(g(x, y) - Dg(0, 0)(x, y) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\|(x, y)\|} \left(Df(0, 0)(x, y) - Dg(0, 0)(x, y) \right) \right\| \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\|Df(0, 0)(x, y) - Dg(0, 0)(x, y)\|}{\|(x, y)\|} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\| \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \|}{\|(x, y)\|} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\| [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \|}{\|(x, y)\|} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \| [1 \quad 1] \frac{1}{\|(x, y)\|} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \| \end{aligned}$$

Luego e_1 es vector unitario como en la demostración

(b) Ahora bien, supongamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\|f(x, y) - g(x, y)\|}{\|(x, y)\|} = 0 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|f(te_1) - g(te_1)\|}{\|t\|} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|f(te_1) - g(te_1)\|}{\|t\|} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{t} \left(f(te_1) - Df(0, 0)te_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{t} \left(g(te_1) - Dg(0, 0)(te_1) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{t} \left(Df(0, 0)(e_1) - Dg(0, 0)(e_1) \right) \right\| \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{r_1(t)}{t} + \frac{r_2(t)}{t} + e_1 \right\| \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|f(te_1) - g(te_1)\|}{\|t\|} &= \|e_1\| \end{aligned}$$

De donde basta notar que para t arbitrariamente pequeño, nunca se anulará el sumando e_1 . Por tanto:

$$f \not\sim_{(0,0)}^1 g$$

3. Por proposición, no es necesario verificar contacto de orden superior.

Utilizando la última proposición, podemos reducir el problema verificando que el polinomio de Taylor de un polinomio es éste mismo, de donde si no son el mismo polinomio (como construcción en el álgebra de términos usual), tampoco tienen el mismo contacto.

Definición 2.14 ($J_x^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$). El conjunto de todos los k -jets en $x \in \mathbb{R}^m$ de funciones de clase $C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, se llama el espacio de k -jets de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n , se denota por $J_x^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y se escribe como:

$$J_x^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \frac{C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)}{\sim_x^k}$$

Denotamos a la función que asigna a toda función su k -jet en x como $j_x^k = \pi_{\sim_x^k}$

Definición 2.15 ($J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$). El conjunto de todos los k -jets de mapeos de clase $C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (en todos los puntos posibles de \mathbb{R}^m) se llama el espacio de k -jets de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n . Se denota por $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y se escribe como:

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{x \in X} J_x^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Denotamos a la función que asigna a toda función f , a la función que asigna su k -jet en x , llamada extensión k -jet de un mapeo como:

$$j^k : f \mapsto (j^k f : x \mapsto j_x^k f)$$

Definición 2.16 (Fuente y Objetivo). Sea $\sigma = j_x^k f \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ un k -jet, entonces existen 2 únicos puntos llamados fuente p y objetivo q de forma que $\forall f \in \sigma, f(p) = q$.

Definimos las funciones fuente y objetivo según:

$$\begin{aligned} \alpha : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ &\sigma \mapsto p \\ \beta : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\sigma \mapsto q \end{aligned}$$

Cuando queramos agrupar todos los k -jets con fuente en U y objetivo en V , escribiremos $J^k(U, V)$

Definición 2.17 (Mapeos $T_k, T_{U,V}$). Sea $(f : U \rightarrow \mathbb{R}) \in C^k$, definimos las funciones T_U^k según:

$$\begin{aligned} T_U^k f : U &\rightarrow \mathcal{P}_k^n \\ x &\mapsto P_{f,x}^k(\cdot) \end{aligned}$$

La cual es biyección por toda clase siendo representada por un único polinomio. Definimos función $T_{U,V}$:

$$T_{U,V} : J^k(U, V) \rightarrow U \times V \times \left(\prod_{j=1}^m \mathcal{P}_k^n \right)$$

$$\sigma \mapsto (\alpha(\sigma), \beta(\sigma), T_U^k f_1(\alpha(\sigma)), \dots, T_U^k f_m(\alpha(\sigma)))$$

la cual es biyección por ser composición de biyecciones.

Comentario 2.18. 1. Notamos que $T_{U,V}$ no depende de U, V para su regla de correspondencia, sino tan sólo para su definición. En efecto, si no definiéramos T_U^k no tendríamos todas las funciones disponibles que son de clase C^k definimos sólo sobre un abierto de \mathbb{R}^m .

2. Cuando las variables sean una cantidad finita x_1, \dots, x_n

$$T_{U,V} : \sigma \mapsto (x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \dots)$$

Esto siendo válido por el espacio de polinomios de grado k y n variables \mathcal{P}_k^n siendo un espacio vectorial finito dimensional.

3. El espacio de jets puede construirse sobre variedades o como un haz (Jet Bundle). Esta construcción está dada en textos como Golubitsky o Thom transversality theorem. Nosotros nos ceñimos a $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ para darle una estructura más sencilla y evitar colmar los preliminares y las demostraciones de la notación de cartas.

Proposición 2.19 (El espacio de k -jets es variedad). *Se cumplen los siguientes resultados sobre los espacios jet:*

1. $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ variedad suave $(m + n + \dim m \binom{n+k}{k})$ -dimensional
2. $J^k(U, V)$ variedad suave $(m + n + \dim m \binom{n+k}{k})$ -dimensional
3. Los mapeos fuente, objetivo y el producto cartesiano de fuente y objetivo son submersiones
4. Si $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable entonces $j^b g : \mathbb{R}^m \rightarrow J^b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para $b \leq k$ es de clase C^{k-b}

Demostración. 1. Vamos a tomar las cartas dadas por:

$$\psi_{U,V} = \phi \circ T_{U,V} : J^k(U, V) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^l$$

donde ϕ proyecta todos los polinomios a sus coordenadas en espacios \mathbb{R}^l , para $l = \binom{n+k}{k}$.

(a) Sabemos que es biyección por ser composición de biyecciones.

(b) Dotamos de la topología inicial:

$$\tau := \{\psi_{U,V}^{-1}(W) \subseteq J^k(U, V) \subseteq J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : W \in \tau_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^l}\}$$

que hace todas estas funciones sean continuas (las cuales inmediatamente se hacen homeomorfismos). En particular:

$$\psi_{U,V}^{-1}(B^m(x_0) \times B^n(y_0) \times B^{ml}(z_0)) \subseteq J^k(B^m(x_0), B^n(y_0))$$

Para $B^m(x_0), B^n(y_0), B^{ml}(z_0)$ bolas abiertas sobre cada espacio euclideo.

(c) Vemos que los abiertos son de la forma dada por los dominios de las cartas. En efecto: La pre-imagen preserva el álgebra de conjuntos dada por unión e intersección, como todo abierto está dado por unión arbitraria de abiertos básicos, y el producto cartesiano de bolas abiertas forman dicha base, tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi_{U,V}^{-1}(U \times V \times \mathbb{R}^{ml}) &\subseteq \bigcup_{B^m \in \beta_U, B^n \in \beta_V} \psi_{U,V}^{-1}(B^m \times B^n \times \mathbb{R}^{ml}) \\ &\subseteq \bigcup_{B^m \in \beta_U, B^n \in \beta_V} J^k(B^m, B^n) \\ &= J^k(U, V) \\ &\subseteq \psi_{U,V}^{-1}(U \times V \times \mathbb{R}^{ml}) \end{aligned}$$

Luego efectivamente es topología **para** $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

(d) Por propiedad de topología inicial, sabemos que es Hausdorff y segundo numerable por funciones que la caracterizan siendo biyecciones y por la base numerable de los espacios euclideos.

(e) Ahora bien, queremos probar la suavidad de los mapeos de transición:

$$\begin{aligned} \psi_{W,Z} \circ (\psi_{U,V})^{-1} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^l &\rightarrow J^k(U, V) \cap J^k(W, Z) \\ &= J^k(U \cap W, V \cap Z) \\ &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^l \end{aligned}$$

Luego expresamos:

$$\begin{aligned} \psi_{W,Z} \circ (\psi_{U,V})^{-1}(x, y, z) &= (\phi \circ T_{U,V}) \circ (\phi \circ T_{W,Z})^{-1}(x, y, z) \\ &= \phi \circ T_{U,V} \circ T_{W,Z}^{-1} \circ \phi^{-1}(x, y, z) \\ &= \phi \circ T_{U,V} \circ T_{W,Z}^{-1}(x, y, p_x^{(1)}, \dots, p_x^{(m)}) \\ &= \phi \circ T_{U,V} \sigma \text{ con } (p_x^{(1)}(\cdot), \dots, p_x^{(m)}(\cdot)) \in \sigma, \alpha(\sigma) = x, (\beta(\sigma) = y) \\ &= \phi \circ (x, y, p_x^{(1)}, \dots, p_x^{(m)}) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

Luego cada mapeo es trivialmente diferenciable por ser la identidad en los puntos donde la intersección no sea vacía.

2. Basta cambiar la prueba anterior llenando los abiertos U y V con las bolas abiertas que estén dentro de cada uno.
3. Los mapeos fuente, objetivo y producto cartesiano son componentes del mapeo $T_{U,V}$. La composición con ϕ no les afecta, por sólo afectar a las últimas componentes. De donde ambas son la proyección a las primeras coordenadas en coordenadas locales, por tanto, son suaves en coordenadas locales
4. Basta tomar la función en coordenadas locales con respecto de la carta $\psi_{U,V}$:

$$\begin{aligned} \psi_{U,V} \circ j^b g : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{j=1}^m \mathbb{R}^{b \binom{n+b}{b}} \\ x &\mapsto \psi_{U,V}(j_x^b g) = (x, y, p_x^{(1)}, \dots, p_x^{(m)}) \end{aligned}$$

Por ser función continua o derivable según si $b = k$ o $b < k$, se tiene que el mapeo será de clase C^{k-b}

□

3 Jet Euclideo

Definición 3.1 (Conjunto Jet). Definamos las nociones auxiliares para identificar al espacio jet con un espacio euclideo.

1. Escribamos al conjunto jet:

$$J^m(K) := \{ \{f^k \in C(K)\}_{|k| \leq m} : k \in \mathbb{N}^n \}$$

conjunto de funciones continuas indexadas por k multi-índice de orden hasta m . Este conjunto esta dotado de la norma de supremo dado por:

$$\| \{f^k\}_{|k| \leq m} \| := \sup_{x \in K, |k| \leq m} |f^k(x)|$$

2. Definimos el operador derivada k como:

$$\begin{aligned} D^k : J^m(K) &\rightarrow J^{m-|k|}(K) \\ \{f^l\}_{|l| \leq m} &\mapsto \{f^{l+k}\}_{|l| \leq m-|k|} \end{aligned}$$

3. Para todo $g \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el jet inducido se describe como:

$$J^m(g) := \{D^k g|_K\}_{|k| \leq m} \in J^m(K)$$

4. Definimos al polinomio inducido de un jet como:

$$t_a^m : J^m(K) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\{f^k\}_{|k|\leq m} \mapsto t_a^m \{f^k\}_{|k|\leq m}(x) = \sum_{|k|\leq m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a)$$

el cual es un operador lineal.

5. Denotaremos al jet inducido por el polinomio inducido como:

$$\overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k|\leq m} := J^m(t_a^m \{f^k\}_{|k|\leq m}) \in J^m(K)$$

6. Definimos la función resto inducida como:

$$r_a^m \{f^k\}_{|k|\leq m} := \{f^k\}_{|k|\leq m} - \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k|\leq m} \in J^m(K)$$

Proposición 3.2 (Propiedades del conjunto Jet). *Se tienen las siguientes propiedades del conjunto Jet:*

$$\begin{aligned} t_a^m \circ \overline{t_b^m} &= t_b^m \\ r_a^m \circ r_b^m &= r_a^m \\ r_a^m \circ r_b^m &= r_a^m \\ \overline{t_a^m} \circ r_b^m &= -\overline{t_b^m} \circ r_a^m = \overline{t_a^m} - \overline{t_b^m} = r_b^m - r_x^m \\ D^k \circ \overline{t_a^m} &= \overline{t_a^{m-|k|}} \circ D^k \end{aligned}$$

Además:

$$(r_a^m \{f^l\}_{|l|\leq m})^k = f^k - t_a^{m-|k|} \circ D^k \{f^l\}_{|l|\leq m}$$

Demostración. 1. Basta componer y aprovechar propiedades combinatorias:

$$\begin{aligned} t_a^m (\overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k|\leq m})(x) &= t_a^m J^m \left(\sum_{|k|\leq m} \frac{(x-b)^k}{k!} f^k(b) \right) (x) \\ &= \sum_{|l|\leq m} \frac{(x-a)^l}{l!} \sum_{\substack{|k|\leq m \\ k\geq l}} \frac{(a-b)^{k-l}}{(k-l)!} f^k(b) \\ &= \sum_{|k|\leq m} \frac{f^k(b)}{k!} \sum_{l\leq k} \binom{k}{l} (x-a)^l (a-b)^{k-l} \\ &= \sum_{|k|\leq m} \frac{(x-b)^k}{k!} f^k(b) = t_b^m \{f^k\}_{|k|\leq m}(x) \end{aligned}$$

El paso entre la segunda y tercera igualdad viene dado por definición de binomio, mientras que el paso entre la tercera y cuarta igualdad viene dado por:

$$\sum_{l \leq k} \binom{k}{l} (x-a)^l (a-b)^{k-l} = \prod_{i=1}^n \sum_{l_i=0}^{k_i} \binom{k_i}{l_i} (x_i - a_i)^{l_i} (a_i - b_i)^{k_i - l_i} = ((x-a) + (a-b))^k = (x-b)^k$$

2. Basta aplicar J^m para obtener el jet inducido sobre el último ítem.
3. Basta desarrollar la composición:

$$\begin{aligned} r_a^m \circ r_b^m \{f^k\}_{|k| \leq m} &= r_a^m (\{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m}) \\ &= \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} (\{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m}) \\ &= \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} + \overline{t_a^m} \circ \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} + \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= r_a^m \{f^k\}_{|k| \leq m} \end{aligned}$$

4. Basta extraer los dos últimos términos de la segunda a cuarta igualdad:

$$\begin{aligned} \overline{t_a^m} \circ r_b^m \{f^k\}_{|k| \leq m} &= \overline{t_a^m} (\{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m}) \\ &= \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} \circ \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= (\overline{t_a^m} - \overline{t_b^m}) \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= -\overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} + \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} \\ &= -(\overline{t_b^m} \{f^k\}_{|k| \leq m} - \overline{t_a^m} \{f^k\}_{|k| \leq m}) \\ &= -\overline{t_b^m} \circ r_a^m \{f^k\}_{|k| \leq m} \end{aligned}$$

5. Desarrollando:

$$\begin{aligned} (D^k \circ \overline{t_a^m} \{f^l\}_{|l| \leq m})^r &= (\overline{t_a^m} \{f^l\}_{|l| \leq m})^{r+k} \\ &= \sum_{|j| \leq m - |r| - |k|} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{j+r+k}(a) \\ &= \sum_{|j| \leq m - |k| - |r|} \frac{(x-a)^j}{j!} (D^k \{f^l\}_{|l| \leq m})^{j+r}(a) \\ &= (\overline{t_a^{m-|k|}} \circ D^k \{f^l\}_{|l| \leq m})^r \end{aligned}$$

6. Basta calcular la k -ésima componente de r_a^m :

$$\begin{aligned} (r_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m})^k &= (\{f^l\}_{|l| \leq m} - \overline{t_a^m} \{f^l\}_{|l| \leq m})^k \\ &= f^k - (\overline{t_a^m} \{f^l\}_{|l| \leq m})^k \\ &= f^k - (D^k \circ \overline{t_a^m} \{f^l\}_{|l| \leq m})^0 \\ &= f^k - (\overline{t_a^{m-|k|}} \circ D^k \{f^l\}_{|l| \leq m})^0 = f^k - \overline{t_a^{m-|k|}} \circ D^k \{f^l\}_{|l| \leq m} \end{aligned}$$

Con lo último dado por el hecho de que la primera función del jet inducido es la función misma. □

Ejemplo 3.3 (Computación en espacio Jet). 1. Sabemos que el espacio $\text{Jet } J_a^k$ queda determinado por las cartas que envían toda función f a su fuente a , objetivo $f(a)$ y a su polinomio de Taylor sobre la fuente $P_{f,a}^k(x-a)$. Recordemos que el polinomio de Taylor para una función euclidea viene dado por:

$$P_{f,a}^k(x-a) = \sum_{|j| \leq k} \frac{1}{j!} D^j f(a) (x-a)^j$$

Lo cual nos permite obtener las coordenadas del polinomio explícitamente. Calculemos 3 casos:

(a) **Caso 1:** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 3$

$$j_a^3 f = \left(a, f(a), f'(a), \frac{1}{2} f''(a), \frac{1}{6} f'''(a) \right) \in \mathbb{R}^5$$

(b) **Caso 2:** $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $k = 3$

$$j_a^3 f = \left(\underbrace{a_1, a_2}_{\text{fuente}}, \underbrace{f_1(a), f_2(a)}_{\text{objetivo}}, \underbrace{\partial_1 f_i, \partial_2 f_i}_{\text{ord. 1}}, \right. \\ \left. \underbrace{\frac{1}{2} \partial_{11} f_i, \frac{1}{2} \partial_{12} f_i, \frac{1}{2} \partial_{22} f_i}_{\text{ord. 2}}, \underbrace{\frac{1}{6} \partial_{111} f_i, \frac{1}{6} \partial_{112} f_i, \frac{1}{6} \partial_{122} f_i, \frac{1}{6} \partial_{222} f_i}_{\text{ord. 3}} \right)_{i=1,2}$$

con dimensión total $2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 22$.

(c) **Caso 3:** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k = 3$

$$j_a^3 f = \left(a, f(a), \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a), \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(a) \right)$$

con $i = 1, \dots, m$ y multi-índices simétricos. La dimensión total es:

$$n + m + mn + m \binom{n+1}{2} + m \binom{n+2}{3}$$

De entre todos, preferiremos mantenernos en el espacio dado por $J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ para poder visualizar su geometría, al ser isomorfo a \mathbb{R}^3 .

2. Tomemos el polinomio parametrizado $f_\mu(x) = \mu - x^2$. Dicho polinomio, al ser interpretado como curva, debe convertirse en un polinomio de Taylor en cada punto donde se defina. Tomando un punto fijo, arbitrario $a \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\begin{aligned} P_{f_\mu, a}^1(x-a) &= f_\mu(a) + f'_\mu(a)(x-a) \\ &= (\mu - a^2) + (-2a)(x-a) \\ &= (\mu + a^2) + (-2a)x \\ &= P_{g_{\mu,0}}^1(x-0) \end{aligned}$$

donde $g_\mu(x) = (\mu + a^2) + (-2a)x$. Se presentan 2 situaciones:

(a) Graficando la curva en J^1 asociada a f_μ tenemos:

$$j^1 f_\mu(a) = j_a^1 f_\mu = (a, \mu - a^2, -2a) = (a, -a^2, -2a) + \mu(0, 1, 0)$$

lo cual es una curva parabólica de la forma $\omega_0^-(a) = (a, -a^2, -2a)$, que se traslada a lo largo del eje Y (el cual representa a las imágenes).

(b) Graficando la curva en J^1 asociada a g_μ tenemos:

$$j^1 g_\mu(0) = j_0^1 g_\mu = (a, \mu + a^2, -2a) = (a, a^2, -2a) + \mu(0, 1, 0)$$

de donde tenemos otra parábola ω_0^+ que se traslada a lo largo del eje Y

Notamos que la extensión de las funciones f_μ y g_μ pueden reescribirse de la forma general como:

$$\begin{aligned} h(\mu, a, b) &= \mu + (-2a)x + a^2 \\ &= \mu + (-2a)(x - b) - 2ab + a^2 \\ &= (\mu + a(a - 2b)) + (-2a)(x - b) \end{aligned}$$

así se tiene que la proyección se da de la forma $\omega^1(\mu, a, b) = (a, \mu + a(a - 2b), -2a)$ dicha proyección sobre el espacio jet toma los valores:

$$\begin{aligned} \omega^1(\mu, a, a) &= j_a^1 f_\mu \\ \omega^1(\mu, a, 0) &= j_0^1 g_\mu \end{aligned}$$

de esta forma, se tiene que toda función parametrizada f_μ tiene una extensión jet sobre un punto a de la forma $j_a^1 f_\mu$, la cual admite múltiples funciones g_μ con la misma extensión, pero sobre un punto fuente distinto. Las gráficas de ambas son distintas, pese a que las extensiones del polinomio no lo sean y esto viene dado por la dependencia en el punto sobre el cual se generan. Es decir, sobre la fuente.

Procederemos a realizar la expansión original de forma completa sobre J^2 :

$$\begin{aligned} P_{f_\mu, a}^2(x - a) &= f_\mu(a) + f'_\mu(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''_\mu(a)(x - a)^2 \\ &= (\mu - a^2) + (-2a)(x - a) + \frac{1}{2}(-2)(x - a)^2 \\ &= (\mu - a^2) + (-2a)(x - a) - (x - a)^2 \\ &= (\mu) + (-1)x^2 \\ &= f_\mu(x) \end{aligned}$$

Notamos que la expansión del polinomio de Taylor coincide con la función original, pese a que haya diferencias con la expansión en J^1 . De manera similar tomamos la función general como:

$$\begin{aligned} h(\mu, a, b) &= (\mu - a^2) + (-2a)(x - a) + (-1)(x - a)^2 \\ &= (\mu - 2ab + b^2) + (-2a + 2b)(x - b) + (-1)(x - b)^2 \end{aligned}$$

así se tiene que la proyección se da de la forma $\omega(\mu, a, b) = (a, \mu + b(b - 2a), 2(b - a), -1)$

dicha proyección sobre el espacio jet toma los valores:

$$\begin{aligned} \omega^2(\mu, a, a) &= j_a^2 f_\mu \\ \omega^2(\mu, a, 0) &= j_0^2 g_\mu \end{aligned}$$

Ahora la función determinada es única en el sentido de que $(\mu) + (-1)x^2 = f_\mu(x)$ son la misma y tienen la misma extensión. La única diferencia de la extensión vienen dada de que al inicio se escribe en la base $\{1, (x - a), (x - a)^2\}$ y al final se escribe en la base $\{1, x, x^2\}$. Se puede ver que la función parametrizada admite una gráfica que satisface:

$$\omega^1(\mu, a, a) = (a, \mu - a^2, -2a) = \pi(a, \mu - a^2, -2a, -1) = \pi\omega^2(\mu, a)$$

3. Si tenemos una función parametrizada con una expansión de Taylor conocida:

$$P_{f_\lambda, a}^k(x - a) = \sum_{|j| \leq k} \frac{1}{j!} D^j f_\lambda(a) (x - a)^j$$

un punto que queremos tomar como nueva fuente b y con ello, tener las coordenadas locales del espacio Jet, tenemos que existe una función de transición $\omega(\lambda, a, b)$ que induce otra función g_λ de tal forma que tengan la misma extensión, pero que la fuente sea distinta.

4. Ahora bien, con esa dificultad de cálculo aparte, tenemos que toda función parametrizada puede tomarse de la forma $\bar{\omega}(\lambda, a) = \omega(\lambda, a, a)$ y podemos calcular la función conociendo un polinomio de Taylor a partir del cambio de coordenadas dado por ω . En particular, una curva de funciones induce una superficie de funciones en el espacio Jet.

Teorema 3.4 (Cambio de base Polinomios). *El cambio de base en el espacio de polinomios dado por las bases:*

$$f \text{ a } e \text{ q } v \text{ d } d \text{ a}$$

viene dado por la matriz:

$$v \text{ d } v \text{ q } d \text{ v } q \text{ w}$$

Demostración. feqfeqfeq

□

Comentario 3.5. Una curva será transversal a una variedad si completa el espacio, o lo que es lo mismo, si los coeficientes verifican:

5

4 Teorema de Transversalidad de Thom

Definición 4.1 (Definiciones auxiliares). Definimos para un mapeo $j : B \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que toma puntos de un conjunto B y devuelve funciones el mapeo evaluación asociado:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^m \times B &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, b) &\mapsto j(b)(x)\end{aligned}$$

Asimismo, definimos el conjunto de valores para los cuales las funciones resultan transversales a $W \leq \mathbb{R}^n$ como:

$$T_{j,W}^\pitchfork := \{b \in B : j(b) \pitchfork W\}$$

Lema 4.2 (Teorema de Transversalidad paramétrica). Sean $W \leq \mathbb{R}^n$ subvariedad, $j : B \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mapeo (no necesariamente continuo) con B variedad suave.

Supongamos que el mapeo de evaluación $\Phi : \mathbb{R}^m \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave y que $\Phi \pitchfork W$, entonces $T_{j,W}^\pitchfork$ es un conjunto denso en B .

Demostración. 1. Sea $W_\Phi = \Phi^{-1}(W)$, tenemos que:

$$\Phi \pitchfork W \Rightarrow W_\Phi = \Phi^{-1}(W) \leq \mathbb{R}^m \times B$$

2. Sea $\pi_{|_{W_\Phi}} : W_\Phi \leq \mathbb{R}^m \times B \rightarrow B$ proyección restringida a W_Φ .
3. Supongamos que $b \notin \text{Im}(\pi_{|_{W_\Phi}})$. Podemos deducir:

$$\begin{aligned}b \notin \text{Im}(\pi_{|_{W_\Phi}}) &\Rightarrow \nexists (x, b) \in W_\Phi \leq \mathbb{R}^m \times B : \pi_{|_{W_\Phi}}(x, b) = b \\ &\Rightarrow \nexists \Phi(x, b) \in W : \pi_{|_{W_\Phi}}(x, b) = b \\ &\Rightarrow \Phi(\mathbb{R}^m, b) \cap W = j(b)(\mathbb{R}^m) \cap W = \emptyset\end{aligned}$$

por argumentar por contrareciproco en el último argumento. De donde $j(b) \pitchfork W$

4. Supongamos que $\dim W_\Phi < \dim B$. Es inmediato que $\lambda(\pi(W_\Phi)) = 0$ por ser subvariedad de dimensión menor al espacio ambiente, luego puede ser cubierto de forma arbitraria por abiertos de B . De donde hay el subconjunto $B - \text{Im}(\pi_{|_{W_\Phi}})$ es denso en B , verificando que para sus elementos $j(b) \pitchfork W$
5. Por ítem anterior, podemos asumir que $\dim W_\Phi \geq \dim B$
6. Sea b un valor regular de $\pi_{|_{W_\Phi}}$ y sea $x \in \mathbb{R}^m$. Tenemos que:

$$(x, b) \notin W_\Phi \Rightarrow \Phi(x, b) = j(b)(x) \notin W \Rightarrow j(b) \pitchfork_x W$$

Luego podemos asumir que $(x, b) \in W_\Phi$. Como b es un valor regular de $\pi_{|_{W_\Phi}}$ y $\dim W_\Phi \geq \dim B$:

$$\begin{aligned}
T_{(x,b)}(\mathbb{R}^m \times B) &= T_{(x,b)}W_\Phi + T_{(x,b)}\mathbb{R}^m \times \{b\} \\
\Rightarrow D\Phi_{(x,b)}T_{(x,b)}(\mathbb{R}^m \times B) &= D\Phi(x,b)T_{(x,b)}W_\Phi + D\Phi(x,b)T_{(x,b)}\mathbb{R}^m \times \{b\} \\
\Rightarrow D\Phi(x,b)T_{(x,b)}(\mathbb{R}^m \times B) &= T_{j(b)(x)}W + D(j(b))(x)T_x\mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que $\Phi \pitchfork W$, de donde:

$$\begin{aligned}
D\Phi(x,b)T_{(x,b)}(\mathbb{R}^m \times B) + T_{\Phi(x,b)}W &= T_{\Phi(x,b)}\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow T_{j(b)(x)}W + D(j(b))(x)T_x\mathbb{R}^m + T_{\Phi(x,b)}W &= T_{\Phi(x,b)}\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow D(j(b))(x)T_x\mathbb{R}^m + T_{j(b)(x)}W &= T_{\Phi(x,b)}\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow j(b) \pitchfork_x W
\end{aligned}$$

7. De donde $B - \text{CritVal}(\pi|_{W_\Phi}) \subseteq T_{j,W}^\pitchfork$. Como este es el único caso que faltaba por verificar y el subconjunto de valores regulares es denso, se sigue el resultado. \square

Corolario 4.3. *Sea $j(b) = G_b$ mapeo que indexe a una familia de mapeos parametrizados, la cual es suave. Se cumple:*

$$G \pitchfork W \leq \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{T_{j,W}^\pitchfork} = B$$

Comentario 4.4. Podemos reformular el corolario como sigue: Dada una familia de mapeos parametrizados, los cuales son transversales a una subvariedad de la imagen (En el sentido de que puedan completar todo el espacio según suma de vectores tangentes respecto de sus parámetro, así como de sus coordenadas espaciales), verifica que la "mayoría" de los mapeos que conforman dicha familia son transversales a dicha subvariedad.

Corolario 4.5 (Mapeos jets parametrizados son densos). *Sea $G : \mathbb{R}^m \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeo suave y $\Phi(x,b) = j^k G_b(x)$ (es decir, que $j(b) = j^k G_b \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$). Entonces, se tiene que:*

$$\Phi \pitchfork W \Rightarrow \overline{T_{j,W}^\pitchfork} = B$$

Comentario 4.6. Notar que la única parte en la que usamos la condición de que los mapeos sean de clase C^∞ es para garantizar la suavidad arbitraria del mapeo $j^k G_b$. Es decir, los mismos teoremas aplican sobre mapeos de clase C^k si consideramos que $j : B \rightarrow C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, con $G_b \in C^{k+1}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$.

Sabemos que a lo menos, para $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, podemos aproximar funciones continuas por funciones de clase C^∞ (**azagra2021calculo**). Recordemos que nuestro problema versa sobre aproximar problemas de bifurcación (campos paramétricos) de clase C^k , pues para ello hemos introducido los conceptos de espacio Jet y transversalidad. Como nuestro caso es práctico y por demás aplicativo, basta con aproximar a la función según la construcción dada por particiones de la unidad del texto, para obtener un mapeo arbitrariamente cercano, luego sobre ese campo sabemos que podemos obtener una aproximación según los campos atravesando bifurcaciones que resulten genéricos.

Definición 4.7 (Topología C^k de Whitney). Sea $U \in \tau_{J^k(X,Y)}$ abierto, con X, Y variedades suaves. Definiendo el conjunto:

$$M(U) := \{f \in C^\infty(X, Y) : (j^1 f)(X) \subseteq U\}$$

Es posible definir como en **golubitsky1973stable**, que $\{M(U)\}$ es una subbase (en realidad, es una base) para una topología en $C^\infty(X, Y)$ si $U \in \tau_{J^k(X,Y)}$. Esta topología es la topología C^k de Whitney. Es en ese sentido en el que diremos que un conjunto residual es "abierto".

Comentario 4.8. A partir de ahora asumiremos que como en el texto citado, hemos generalizado los resultados a variedades. La razón es que necesitamos saber que el conjunto de llegada sea una variedad para aplicar los resultados sobre el espacio jet como variedad, teniendo mapeos suaves entre variedades según $j^k : X \mapsto J^k(X, Y)$. Esto sólo es para saber que podamos obtener conjuntos abiertos en la definición de residual, por lo que no es la parte de mayor importancia.

Lema 4.9 (Criterio de Transversalidad). Sea X, Y variedades suaves, $W \leq Y$ una subvariedad de codimensión $\text{codim } W = k$ y $f : X \rightarrow Y$ mapeo suave. Sea $x \in X, f(x) \in W$. Supongamos que:

$$\exists U \in \mathcal{V}_{(Y, \tau_Y)}(f(x)), \exists(\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k) : W \cap U = \phi^{-1}(0)$$

Entonces:

$$f \pitchfork_x W \iff \phi \circ f \text{ submersión}$$

Demostración. Sabemos que $\text{Ker } D\phi(f(x)) = T_{f(x)}W$. En efecto:

1. (\supseteq) Por caracterización de la derivada por curvas:

$$\begin{aligned} v \in T_{f(x)}W &\Rightarrow \exists(\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W) : [(\alpha(0) = f(x)) \wedge (D\alpha(0) = v)] \\ &\Rightarrow [\phi(\alpha(t)) = 0] \\ &\Rightarrow D\phi(\alpha(0))D\alpha(0) = 0 \\ &\Rightarrow D\phi(f(x))v = 0 \\ &\Rightarrow v \in \text{Ker}(D\phi(f(x))) \end{aligned}$$

2. Por ser ϕ submersión, todos sus puntos son valores regulares. De donde:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(0) = W \cap U &\Rightarrow \dim T_{f(x)}Y = \dim \text{Ker}(D\phi(f(x))) + \dim \mathbb{R}^k \\ &\Rightarrow \dim T_{f(x)}Y = \dim \text{Ker}(D\phi(f(x))) + \text{codim } W \\ &\Rightarrow \dim Y = \dim T_{f(x)}Y = \dim \text{Ker}(D\phi(f(x))) + \dim Y - \dim W \\ &\Rightarrow \dim \text{Ker}(D\phi(f(x))) = \dim W = \dim T_{f(x)}W \end{aligned}$$

De donde sólo queda que son idénticos

Ahora bien, la transversalidad se sigue de:

$$\begin{aligned} f \pitchfork_X w &\iff T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + Df(x)T_xX \\ &\iff T_{f(x)}Y = \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$(\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k) \text{ submersión} \implies (D\phi(f(x)) : T_{f(x)}U \rightarrow \mathbb{R}^k) \text{ sobreyect.}$$

Afirmamos que:

$$(D(\phi \circ f)(x) : T_xX \rightarrow \mathbb{R}^k) \text{ sobreyect.} \iff T_{f(x)}Y = \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX$$

En efecto:

1. (\implies) Si es sobreyectiva, entonces:

$$\begin{aligned} w \in T_{f(x)}Y &\implies \exists u \in T_xX : D(\phi \circ f)(x)u = D\phi(f(x))w \in \mathbb{R}^k \\ &\implies D\phi(f(x))[w - Df(x)u] = D\phi(f(x))w - D(\phi \circ f)(x)u = 0 \\ &\implies [w - Df(x)u] \in \text{Ker } D\phi(f(x)) \\ &\implies w \in \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX \\ &\implies T_{f(x)}Y \leq \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX \leq T_{f(x)}Y \\ &\implies T_{f(x)}Y = \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX \end{aligned}$$

2. Supongamos que se admite la descomposición:

$$\begin{aligned} T_{f(x)}Y = \text{Ker } D\phi(f(x)) + Df(x)T_xX &\implies \forall v \in \mathbb{R}^k \exists w \in T_{f(x)}Y = w_1 + w_2 : w_1 \in \text{Ker } D\phi(f(x)), w_2 \\ &\implies D\phi(f(x))[w_1 + Df(x)u] = v \\ &\implies D\phi(f(x))w_1 + D\phi(f(x))Df(x)u = v \\ &\implies D(\phi \circ f)(x)u = v \end{aligned}$$

Luego se sigue la sobreyectividad.

Por ser equivalentes, se deduce que $\phi \circ f$ es submersión en x si sólo si $f \pitchfork_x W$ \square

Proposición 4.10 (T_W Abiertos). *Sea X, Y variedades suaves con $W \leq Y, W \in \tau_Y^c$ subconjunto cerrado que es a su vez subvariedad cerrada de Y . Sea el conjunto de las funciones transversales:*

$$T_W := \{f \in C^\infty(X, Y) : f \pitchfork W\}$$

Entonces $T_W \in \tau_{C^\infty(X, Y)}$ en la topología C^∞

Demostración. 1. Definamos el conjunto:

$$U := \{\sigma = j_x^1 f \in J^1(X, Y) : (\beta(\sigma) \notin W) \vee ([\beta(\sigma) \in W] \wedge [T_{\beta(\sigma)} Y = T_y W + Df(x)T_x X])\}$$

2. Como $M(U) = T_W$ por definición. Basta probar que U es abierto bajo la topología de Whitney que acabamos de definir.
3. Sea $V = J^1(X, Y) - U$. Sea $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq V$ secuencia convergente y sea $\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k$.
4. Como:

$$W^c \subseteq U \Rightarrow V \subseteq W \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \alpha(\sigma_k) \in W$$

Ahora bien, como W es cerrado y β es continuo, se sigue que:

$$\beta(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(\sigma_k) \in W$$

De donde sólo falta verificar que para f que represente a σ , $f \not\pitchfork W$

5. Tomando $f : x \in X \mapsto f(x) \in W$ (dado por $\beta(\sigma) \in W$), tenemos que podemos usar 2 cartas:

$$\varphi : U_x \in \tau_X$$

$$\psi : U_{f(x)} \in \tau_Y$$

donde $U_{f(x)} \subseteq W$. Por Teorema de caracterización de subvariedades inmersas o regulares de **lee2013smooth**, tenemos que podemos escribir en coordenadas a la subvariedad W como el subespacio dado por $W \xrightarrow{\psi} \{0\} \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, podemos escribir $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$.

6. Usando $\phi = \pi|_{(\psi(U_{f(x)}))} \circ \psi : U_{f(x)} \rightarrow \psi(U_{f(x)}) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ y $\psi \circ f : U_{f(x)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeo suave, tenemos que podemos aplicar el Lema (recordemos que $n - k = \text{codim } W$ y π submersión, por composición con ψ submersión por ser carta, tenemos que ϕ es submersión) de tal forma que:

$$f \pitchfork_x W \iff \phi \circ f \text{ submersión en } x \iff \phi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ submersión en } 0$$

7. Lo último es equivalente a que:

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} \notin \{A \in \mathbb{R}^{m \times (n-k)} : \text{ran } A < n - k\}$$

Sabemos por teoría básica de álgebra lineal que por medio de la continuidad de la determinante y de las proyecciones, obtenemos que el conjunto descrito es cerrado.

8. Considerando:

$$\eta : \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{m \times n} \subseteq \psi_{U_x, U_{f(x)}} \left(J^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \right) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times (n-k)}$$

$$(x, f(x), B) \mapsto \phi \circ B$$

Tenemos que por continuidad de η , inmediata por ser composición de proyección con ϕ continua: $\eta^{-1}(\{A \in \mathbb{R}^{m \times (n-k)} : \text{ran } A < n - k\}) \subseteq \mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{m \times n}$ es cerrado. Como $\mathbb{R}^m \times W \times \mathbb{R}^{m \times n} \subseteq \psi_{U_x, U_{f(x)}} \left(J^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \right)$ subconjunto cerrado en la topología inicial inducida, tenemos que la preimagen original es cerrado.

9. Por todo lo anterior, como:

$$\sigma \in V \iff [(f(x) \in W) \wedge (f \circ \varphi^{-1} \not\lhd_0 W)] \iff \eta \circ \psi_{U_x, U_{f(x)}}(\sigma) \in \{A \in \mathbb{R}^{m \times (n-k)} : \text{ran } A < n - k\}$$

De donde se sigue que es cerrado en el contexto local. Caracterizando de forma global a los cerrados por límite se sigue el resultado (pues sólo requerimos que sean cerrados localmente). □

Definición 4.11 (Transversal sobre Subconjunto). Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ suave es transversal a $W \leq Y$ subvariedad sobre $W' \subseteq W$ si:

$$\forall x \in f^{-1}(W') \subseteq X, f \lhd_x W$$

Teorema 4.12 (Teorema de la Transversalidad en Jets). Sea $W \leq J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ subvariedad del espacio de Jets de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n . Definamos el conjunto de funciones cuyas extensiones k -jet son transversales a W

$$T_{j^k, W}^\lhd = T_W := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : j^k f \lhd W\}$$

entonces T_W es un subconjunto residual en la topología C^∞

Demostración. 1. Como W es una subvariedad de $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tenemos que podemos encontrar un cubrimiento numerable $\{W_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ verificando:

- (a) $\overline{W_j} \subseteq W$
- (b) $\overline{W_j}$ compacto
- (c) $\exists U_j \in \mathbb{R}^m, V_j \in \mathbb{R}^n : \pi(W_j) \subseteq U_j \times V_j$, donde $\pi : J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ proyección dada por fuente y objetivo
- (d) $\overline{U_j}$ compacto

Esta es simplemente la reformulación de la proposición que caracteriza a las bolas coordenadas de una variedad como en **lee2013smooth**

2. Definamos los conjuntos:

$$T_{W_j} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) : j^k f \pitchfork W \text{ sobre } \overline{W_j}\}$$

3. Es inmediato ver que:

$$T_W = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} T_{W_j}$$

En efecto, expresando:

$$\begin{aligned} T_{W_j} &= \{f \in C^\infty(M, N) : j^k f \pitchfork W \text{ sobre } \overline{W_j}\} \\ &= \{f \in C^\infty(M, N) : \left(\forall x \in f^{-1}(\overline{W_j}) \subseteq \mathbb{R}^m, j^k f \pitchfork_x W \right)\} \end{aligned}$$

Ahora bien, basta expresar las equivalencias:

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} T_{W_j} &\iff \forall j \in \mathbb{N}, f \in T_{W_j} \\ &\iff \forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in f^{-1}(\overline{W_j}) \subseteq \mathbb{R}^m, j^k f \pitchfork_x W \end{aligned}$$

Recordando que $j^k f : \mathbb{R}^m \rightarrow J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y que $j^k f \pitchfork W$ si lo es en todo $f^{-1}(W)$, entonces:

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} T_{W_j} &\iff \forall j \in \mathbb{N}, j^k f \pitchfork_{f^{-1}(\overline{W_j})} W \\ &\iff \forall x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(\overline{W_j}) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{W_j}\right) = f^{-1}(W), j^k f \pitchfork_x W \\ &\iff \forall x \in f^{-1}(W), j^k f \pitchfork_x W \\ &\iff j^k f \pitchfork W \end{aligned}$$

Luego queremos ver que cada T_{W_j} es abierto y denso en $C^\infty(M, N)$. Por definición de conjunto residual como dada en los cursos básicos de análisis funcional, se obtiene el resultado.

4. Veamos primero que los conjuntos sean abiertos:

(a) Definamos los conjuntos:

$$T_j := \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^m, J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) : g \pitchfork W \text{ sobre } \overline{W_j}\}$$

(b) Por proposición anterior, T_j es abierto por $\overline{W_j} \subseteq W$ cerrado. Basta considerar la demostración y tomar restricción sobre los conjuntos para obtener resultado. De donde $T_{W_j} = (j^k)^{-1}(T_j)$ abierto

5. Veamos ahora que son densos:

(a) Consideremos las funciones suaves verificando:

$$\begin{aligned}\rho_\phi : \mathbb{R}^m &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \rho_\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \alpha(\overline{W_j}) \\ 0, & x \notin U_r \end{cases} \\ \rho_\varphi : \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \rho_\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \beta(\overline{W_j}) \\ 0, & x \notin V_h \end{cases}\end{aligned}$$

donde U_r, V_h vecindades de $\alpha(\overline{W_j}), \beta(\overline{W_j})$ respectivamente. La elección de ρ_ϕ, ρ_φ es posible debido a la compacidad de $\overline{W_j}$ y al Lema de Urysohn. (Imagen continua de un compacto es compacto, luego podemos obtener una vecindad compacta sobre la cual aplicar el Lema de Urysohn)

(b) Definamos al conjunto de polinomios de grado k :

$$B := \{p \in \mathbb{R}^n[\{x_t\}_{j=1}^m] : \partial p \leq k\}$$

Asimismo, definamos:

$$\begin{aligned}\forall b \in B, g_b : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto g_b(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in U_j^c \cup f^{-1}(V_j^c) \\ \rho_\phi(x)\rho_\varphi(f(x))b(x) + f(x) & \end{cases}\end{aligned}$$

La elección de ρ_ϕ, ρ_φ garantiza que g_b es función suave, la cual es una perturbación polinomial de f , la cual coincide para $x \in U_j^c \cup f^{-1}(V_j^c)$, es decir, fuera de los valores que nos interesan.

Luego es una perturbación polinomial sobre $U_j \cap f^{-1}(V_j)$.

(c) Definamos la función

$$\begin{aligned}G : \mathbb{R}^m \times B &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, b) &\mapsto G(x, b) = g_b(x)\end{aligned}$$

G es mapeo suave por ser dado de la forma anterior (producto y composición de funciones suaves).

(d) Definamos:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}^m \times B &\rightarrow J(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ (x, b) &\mapsto j_x^k g_b\end{aligned}$$

para aplicar corolario anterior, debemos verificar que $\Phi \pitchfork W$ en $\overline{W_j}$.

(e) Definamos el valor:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(\text{sop } \rho_\varphi, \mathbb{R}^m - V_h), d(\beta(\overline{W}_j), \rho_\varphi^{-1}([0, 1]))\}$$

Definamos al subconjunto:

$$B' := \{b \in B : |b(x)| < \epsilon \quad \forall x \in \text{sop}(\rho_\phi)\} = z^{-1}(| \cdot |^{-1}(B_\epsilon(0)))$$

Donde:

$$\begin{aligned} z : B &\subseteq C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\text{sop}(\rho_\phi); \mathbb{R}^n) \\ b &\mapsto b|_{\text{sop}(\rho_\phi)} \end{aligned}$$

aplicación restricción. Sabemos que es aplicación lineal, por tanto continua, de donde se sigue la continuidad. Además la norma es lineal, de donde B' es abierto. Se sigue que: $B' \in \mathcal{V}_{(B, \tau_B)}(0)$

(f) Sea $(x, b) \in \mathbb{R}^m \times B'$ y $\Phi(x, b) \in \overline{W}_r$. A partir de ahora fijaremos los valores de x y b . Se cumple:

$$\Phi(x, b) = j_x^k g_b \in \overline{W}_r \Rightarrow (x \in \alpha(\overline{W}_r)) \wedge (g_b(x) \in \beta(\overline{W}_j))$$

(g) Podemos calcular la distancia aprovechando definición de B según:

$$d(g_b(x), f(x)) = |\rho_\phi(x) \rho_\phi(f(x)) b(x)| \begin{cases} \leq |b(x)| < \epsilon & \forall x \in \text{sop}(\rho_\phi) \subseteq V_h \\ = 0 \end{cases}$$

(h) Podemos obtener:

$$(g_b(x) \in \beta(\overline{W}_j)) \wedge (f(x) \in V_h) \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(\rho_\varphi^{-1}(1))$$

En efecto, recordemos que, por definición de ρ_φ :

$$f(x) \in V_h \Rightarrow \rho_\varphi(f(x)) = 1 \Rightarrow f(x) \in \rho_\varphi^{-1}(1)$$

Además, por distancia anterior:

$$\begin{aligned} d(g_b(x), f(x)) &< \epsilon < d(\beta(\overline{W}_j), \rho_\varphi^{-1}([0, 1])) \\ \Rightarrow f(x) &\in B_\epsilon(g_b(x)) \subseteq B_\epsilon(\beta(\overline{W}_j)) \subseteq \rho_\varphi^{-1}(1) \end{aligned}$$

Con la última inclusión dada por definición de ρ_φ

(i) Asimismo, $\rho_\phi = 1$ en $B_\epsilon(\beta(\overline{W}_j)) \in \mathcal{V}_{(\mathbb{R}^m, \tau_{\mathbb{R}^m})}(x)$, de tal forma que:

$$\forall x' \in f^{-1}\left(B_\epsilon(\beta(\overline{W}_j))\right), g_b(x') = b(x') + f(x')$$

- (j) Análogamente, es posible hacer lo mismo $\forall b'$ suficientemente cerca de b en B . Si fijamos en lugar de x , el x' y los renombramos, vemos que $f(x) = g_0(x)$, de donde:

$$[d(g_b(x), g_0(x)) < \epsilon] \wedge [d(g_{b'}(x), g_0(x)) < \epsilon] \Rightarrow d(g_b(x), g_{b'}(x)) < 2\epsilon < d(\beta(\overline{W}_j), \rho_\varphi^{-1}([0, 1]))$$

Lo cual es válido para todo $b' \in B'$.

De donde como antes:

$$g_{b'}(x) \in B_\epsilon(g_b(x)) \subseteq B_\epsilon(\beta(\overline{W}_j)) \subseteq \rho_\varphi^{-1}(1)$$

De donde se cumple la igualdad para x que es el x' dado del ítem anterior. Por tanto, desfijando el x' tenemos:

$$\forall x' \in f^{-1}\left(B_\epsilon(\beta(\overline{W}_j))\right), \forall b' \in B', g_{b'}(x') = b'(x') + f(x')$$

- (k) Dado $\sigma \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ cerca de $\Phi(x, b) = j_x^k g_b$ y sea $x' = \alpha(\sigma)$. Entonces la ecuación en $b' \in B$:

$$\sigma = j^{k'}(b' + f)(x')$$

determina solución única para b' y x' suficientemente cercanos.

En efecto, vimos que para una vecindad suficientemente cercana la ecuación puede reducirse a ubicar b' según la expresión:

$$\sigma = j_{x'}^k g_{b'}(x)$$

Pero todo jet queda determinado por el polinomio de Taylor de algún representante. Considerando el polinomio dado a partir de x' que represente a σ , determinamos inmediatamente el valor de $\sigma - j_{x'}^k f$ como polinomio en x' según el mapeo $T_{U,V}$. Ahora bien, este polinomio determinará a b pues todo polinomio se tiene a sí mismo como expansión de Taylor. Es decir:

$$b'(x') \equiv j_{x'}^k b' = \sigma - j_{x'}^k f$$

Luego la solución es única y es dada como mapeo suave según $\sigma \mapsto (x', b') = (\alpha(\sigma), T_{U,V}(\sigma - j_{x'}^k f))$ mapeo suave por composición de mapeos suaves, el cual es inversa de Φ .

- (l) Como Φ es suave y su inversa es suave, se sigue que es difeomorfismo local alrededor de (x, b) arbitrarios.
- (m) Por Φ difeomorfismo se sigue que cumple transversalidad en todas las vecindades de los puntos donde esté definido (sobre \overline{W}_j) Luego aplicando corolario de transversalidad paramétrica, resulta que el conjunto de valores B para los cuales la funciones $j(b)(x) = \Phi(x, b) = j_x^k g_b(x)$ resultan transversales es denso.

(n) Luego, dado $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ubicaremos una secuencia en $\{b_t\}_{t \in \mathbb{N}} \subseteq B$ que converja a 0 tal que $j^k g_{b_t} \pitchfork W$ en \overline{W}_j . (Posible por ítem anterior)

Como $g_0 = f, g_b = f$ fuera de U_r , tendremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{b_t} = g_0 = f$ en $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Por tanto f puede aproximarse utilizando g_{b_t} .

Se concluye que T_{W_r} es denso en $C^\infty(M, N)$.

□

Comentario 4.13. Debemos evaluar todo el proceso para entender cómo es que las funciones son transversales son genéricas en el sentido de aproximación por abierto arbitrario:

1. vдавd
2. давda

5 Ideales de Funciones Diferenciables

Definición 5.1 (Funciones cóncavas). Una función $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se dice cóncava si se cumple que:

$$\forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)\alpha(t_1) + \lambda\alpha(t_2) \leq \alpha((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2)$$

Definición 5.2 (Módulo de continuidad). Una función continua, monótona creciente, cóncava $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con $\alpha(0) = 0$ se dice un módulo de continuidad

Teorema 5.3 (Existencia de las funciones de Whitney). *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. La componente k -ésima de un resto inducido de orden m tiene orden $m - |k|$:

$$\forall x, y \in K, \forall |k| \leq m, (r_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m})^k(y) = \mathcal{O}(|x - y|^{m-|k|})$$

2. Existe un módulo de continuidad $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

$$\forall x, y \in K, \forall |k| \leq m, |(r_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m})^k(y)| \leq |x - y|^{m-|k|} \alpha(|x - y|)$$

3. Existe un módulo de continuidad $\alpha_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que:

$$\forall x, y \in K, \forall z \in \mathbb{R}^n, |t_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m}(z) - t_y^m \{f^k\}_{|k| \leq m}(z)| \leq \alpha_1(|x - y|) \cdot (|x - z|^m + |y - z|^m)$$

A partir del segundo ítem podemos obtener $\alpha_1 = c(m, n)\alpha$ que satisfaga el tercer ítem, mientras que a partir del tercer ítem podemos obtener $\alpha = c_1(m, n)\alpha_1$

Demostración. 1. (2 \Rightarrow 1) La continuidad de α garantiza el resultado.

2. (1 \Rightarrow 2) Basta ver que la función:

$$\beta(t) := \sup_{x, y \in K; x \neq y; |x - y| \leq t; |k| \leq m} \frac{|(r_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m})^k(y)|}{|x - y|^{m-|k|}}$$

induzca un módulo de continuidad.

- (a) La función β es no decreciente. Sea $t_1 < t_2$ reales positivos, debido a que el dominio sobre el cual se define $\beta(t_1)$ es menor que el dominio sobre el cual se define $\beta(t_2)$, entonces el supremo es mayor o igual sobre el segundo. Por tanto, $\beta(t_1) \leq \beta(t_2)$
- (b) Por suposición, $\beta(0) = 0$ y es continua en 0.
- (c) Considerando la envolvente convexa del gráfico de β :

$$\text{conv}(\text{Graf}(\beta) \cup ([0, \infty) \times \{0\}))$$

tenemos que podemos obtener una curva dentro del complemento, con un módulo de continuidad asociado α , el cual satisfaga $\alpha(t) \geq \beta(t)$.

3. (2 \Rightarrow 3) Usando las propiedades tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq m} \frac{(z-x)^k}{k!} (r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m})^k(x) &= t_x^m (r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m})(z) \\
&= t_x^m \circ \overline{t_x^m} \circ r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z) \\
&= t_x^m (\overline{t_x^m} - \overline{t_y^m}) \{f^l\}_{|l|\leq m}(z) \\
&= t_x^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z) - t_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z)
\end{aligned}$$

Aplicando desigualdad triangular y cota:

$$\begin{aligned}
|t_x^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z) - t_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z)| &\leq \sum_{|k|\leq m} \frac{|z-x|^{|k|}}{k!} |(r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m})^k(x)| \\
&\leq \sum_{|k|\leq m} \frac{|z-x|^{|k|}}{k!} |x-y|^{m-|k|} \alpha(|x-y|) \\
&\leq \alpha(|x-y|) \sum_{|k|\leq m} \frac{1}{k!} |x-y|^{m-|k|} |z-x|^{|k|} \\
&\leq \alpha(|x-y|) \cdot c(m, n) (|x-z|^m + |y-z|^m)
\end{aligned}$$

donde $c(m, n)$ es dado por tomar el máximo de la desigualdad de Young en el argumento de la sumatoria. Tomando $\alpha_1 := c(m, n)\alpha$ se tiene el resultado.

4. (3 \Rightarrow 2) Como en el ítem anterior:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{|k|\leq m} \frac{(z-x)^k}{k!} (r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m})^k(x) \right| &= |t_x^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z) - t_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m}(z)| \\
&\leq \alpha_1 (|x-y|) \cdot c(m, n) (|x-z|^m + |y-z|^m)
\end{aligned}$$

Podemos definir el vector y al escalar:

$$\begin{aligned}
w &:= x + \frac{1}{|x-y|} (z-x) \\
\lambda &:= |x-y|
\end{aligned}$$

Vemos que $|z-x| = \frac{|w-x|}{\lambda}$ y que $w = x + \frac{1}{\lambda}(z-x)$. Con esto tenemos que:

$$\left| \sum_{|k|\leq m} \frac{\lambda^{|k|} (w-x)^k}{k!} (r_y^m \{f^l\}_{|l|\leq m})^k(x) \right| \leq \alpha_1 (|x-y|) \cdot c(m, n) \lambda^m (1 + |w-x|^m)$$

Como el lado izquierdo es un polinomio en w , tenemos que aplicando el criterio de Cauchy (revisar apuntes de análisis complejo), existe una constante $c_1(m, n)$ verificando:

$$\left| \frac{\lambda^{|k|}}{k!} (r_y^m \{f^l\}_{|l| \leq m})^k(x) \right| \leq \alpha_1(|x - y|) \cdot c_1(m, n) \lambda^m$$

entonces se verifica la cota buscada:

$$\left| \frac{1}{k!} (r_y^m \{f^l\}_{|l| \leq m})^k(x) \right| \leq \alpha_1(|x - y|) \cdot c_1(m, n) \lambda^{m-|k|}$$

□

Definición 5.4 (Función de Whitney). Un jet cumpliendo alguna de (y por tanto todas) las condiciones del teorema anterior se dice función de Whitney de clase C^m sobre K . Tenemos las siguientes definiciones:

1. El subespacio de todas las funciones de Whitney de clase C^m sobre K se denota por $\Xi^m(K)$.
2. El módulo de continuidad de una función de Whitney de clase C^m sobre K construido a partir de la segunda condición se llama el módulo de continuidad del jet.
3. Definimos las normas:

$$\begin{aligned} \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_r}^K &:= \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\| + \sup_{x, y \in K; x \neq y; |k| \leq m} \frac{(r_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m})^k(y)}{|x - y|^{m-k}} \\ \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_t}^K &:= \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\| + \sup_{x, y \in K; x \neq y; |k| \leq m; z \in \mathbb{R}^n} \frac{|t_x^m \{f^k\}_{|k| \leq m}(z) - t_y^m \{f^k\}_{|k| \leq m}(z)|}{|x - z|^m + |y - z|^m} \end{aligned}$$

Su existencia viene garantizada por proposición anterior, además, son equivalentes:

$$\|\{f_k\}_{|k| \leq m}\| \leq c \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_t} \leq c_1 \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_r}$$

En lo sucesivo, usaremos con mayor frecuencia $\|\cdot\|_{m, \Xi_t}$.

4. Podemos escoger α y α_1 de forma tal que:

$$\begin{aligned} \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_r} &= \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\| + \alpha(\text{diam}(K)) \\ \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\|_{m, \Xi_t} &= \|\{f_k\}_{|k| \leq m}\| + \alpha_1(\text{diam}(K)) \end{aligned}$$

Proposición 5.5 ($\Xi^m(K)$ es Banach). *El espacio $\Xi^m(K)$ dotado de cualquiera de las normas de la definición anterior es un espacio de Banach.*

Demostración. □

Comentario 5.6. Caracterizaremos ahora la posibilidad de extender funciones Jet a funciones en el sentido anterior.

Lema 5.7 (Partición de la unidad auxiliar). *Dado un $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, existe una partición de la unidad $\{\phi_i\} \subseteq C(\mathbb{R}^n - K; \mathbb{R})$ subordinada a $\mathbb{R}^n - K$ satisfaciendo:*

1. *El "radio" del soporte no supera a su distancia al compacto (está lo suficientemente lejos)*

$$\forall i \in I, \text{diam sop } \phi_i \leq 2d(\text{sop } \phi_i, K)$$

2. *Las derivadas de cada función en un punto están acotadas por un escalamiento de la inversa de la distancia del punto al compacto:*

$$|D^k \phi_i(x)| \leq C_k \left(1 + \frac{1}{d(x, K)^{|k|}} \right)$$

el factor de distancia viene dado por tomar la equivalencia de métricas:

$$\left(1 + \frac{1}{d(x, y)^{|k|}} \right)^{-1} = \frac{d(x, y)^{|k|}}{1 + d(x, y)^{|k|}} \equiv (d(x, y))^{-1}$$

Demostración. 1. Tomamos a \mathbb{R}^n seccionado en cubos cerrados con longitud 1. Tomamos el conjunto externo $K + \sqrt{n}$, al exterior de éste, extraemos la familia de todos los cubos posibles K_0 . Los cubos anidados con longitud $\frac{1}{2}$ distribuidos uniformemente se construyen. Ahora bien, tomamos $K + \frac{\sqrt{n}}{2}$ y al exterior tomamos los cubos que no estén en K_0 . Siguiendo de este modo obtenemos las familias de cubos $\{K_p\}_{p \in \mathbb{N}}$. Definamos a $I = \bigcup_{p \geq 0} K_p$

2. Considerando cualquier función gorpe verificando:

$$\begin{cases} \psi(x) = 1 & , \forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| \leq \frac{1}{2} & (x \in [0, \frac{1}{2}]^n) \\ \psi(x) = 0 & , \exists i \in \{1, \dots, n\} : |x_i| \geq \frac{3}{4} & (x \in [\frac{3}{4}, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots) \end{cases}$$

3. Para todo cubo $S \in I$, definimos la función:

$$\psi_S(x) = \psi\left(\frac{x - x_S}{l_S}\right)$$

donde x_S es el centro del cubo y l_S es la longitud de un lado de S . Esto es, consideramos un reescalamiento para que x sea considerado como punto del espacio del bloque S y suavemente decrece del 1, alcanzado en los cubos de la mitad de longitud del cubo original, al 0.

4. Por la construcción de I , tenemos que $\{\text{sop } \psi_S\}_{S \in I}$ es una familia localmente finita, en efecto, basta tomar una bola abierta con radio dado (suficientemente pequeña) y considerar los cubos que cubren dicha bola abierta, como el radio determina un nivel p (basta usar definición de unión que da existencia de p al definir I), entonces los cubos de hasta dicho nivel forman una cantidad finita de términos cubriendo a la bola suficientemente pequeña para ver que la intersección es vacía para todos los cubos salvo una cantidad finita de ellos.
5. Definimos la normalización dada por:

$$\tilde{\psi}_S(x) = \frac{\psi_S(x)}{\sum_{T \in I} \psi_T(x)}$$

6. Es fácil ver que:

$$\frac{\text{diam}(\text{sop } \psi_S)}{2} \leq \frac{3\sqrt{n}l_S}{4} = \sqrt{n}l_S - \frac{\sqrt{n}l_S}{4} \leq d(S, K) - \frac{3\sqrt{n}l_S}{4}d(\text{sop } \psi_S, K)$$

donde $l_{\text{sop } \psi_S}$ es el lado de un bloque donde se encuentra el soporte.

7. Se cumple la cota sobre la derivada usando la regla de la cadena y la estimativa de Cauchy:

$$|D^k \psi_S(x)| = \left| \frac{1}{l_S^{|k|}} D^k \psi \left(\frac{x - x_S}{l_S} \right) \right| \leq \frac{C}{l_S^{|k|}}$$

Por lo que, tenemos 2 casos:

- (a) $l_S = 1$ entonces la cota buscada se cumple inmediatamente.
 (b) $l_S < 1$ entonces basta ver que:

$$x \in \text{sop}(\psi_S) \Rightarrow d(x, K) \leq \frac{\sqrt{n}l_S}{2}$$

En ambos casos:

$$|D^k \phi_i(x)| \leq C \left(1 + \left(\frac{\sqrt{n}}{2d(x, K)} \right)^{|k|} \right) = C \left(1 + \frac{1}{d(x, K)^{|k|}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right)^{|k|} \right) \leq C \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right)^{|k|} \left(1 + \frac{\sqrt{1}}{d(x, K)^{|k|}} \right)$$

De donde se obtiene el resultado. □

Teorema 5.8 (Teorema de Whitney). *Existe un mapeo lineal de extensión:*

$$\begin{aligned} W : \Xi^m(K) &\rightarrow C^m(\mathbb{R}) \\ \{f^k\}_{|k| \leq m} &\mapsto W(\{f^k\}_{|k| \leq m}) \end{aligned}$$

verificando que:

$$\forall |k| \leq m, D^k W(\{f^k\}_{|k| \leq m})(x) = f^k(x)$$

En otras palabras, dada una lista de funciones (que corresponden a las derivadas parciales) tenemos que si admiten un módulo de continuidad asociado, entonces pueden extenderse a una función original cuya extensión jet es la lista original.

Demostración. 1. Para cada cubo $S \in I$ dado como en la proposición anterior, escogemos un punto $a_S \in K$ verificando:

$$d(\text{sop } \psi_S, K) = d(\text{sop } \psi_S, a_S)$$

Es decir, que se maximizan (posible, por función distancia continua sobre un compacto) la distancia al soporte.

2. Sea la función que extiende al jet $\{f^k\}_{|k| \leq m}$ dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{f}(x) &:= \begin{cases} f^0(x) & , x \in K \\ \sum_{S \in I} \psi_S(x) t_{a_S}^m \{f^k\}_{|k| \leq m}(x) & , x \notin K \end{cases} \end{aligned}$$

Como es suma y producto de funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n - K)$, se tiene que $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n - K)$.

3. Definamos a las funciones continuas \tilde{f}^k como:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tilde{f}^k(x) &:= \begin{cases} f^k(x) & , x \in K \\ D^k \tilde{f}(x) & , x \notin K \end{cases} \end{aligned}$$

4. Sea L cubo en cuyo interior está K ($K \supseteq \text{int}(L)$) y $\lambda := \sup_{x \in L} d(x, K)$.

5. Para $x \in \text{sop}(\psi_S)$ tenemos que:

$$\forall a \in K, d(x, K) \leq |x - a|$$

Por desigualdad de la proposición anterior con respecto del "radio" del soporte, tenemos:

$$\forall a \in K, d(x, K) \leq |x - \tilde{a}_S| + |\tilde{a}_S - a_S| \leq \text{diam}(\text{sop } \psi_S) + d(\text{sop}(\psi_S), K) \leq 3d(x, K)$$

donde \tilde{a}_S es el punto en $\text{sop}(\psi_S)$ asociado a la distancia mínima de a_S . Con esto obtenemos:

$$\alpha(|a - a_S|) \leq \alpha(|x - a| + |x - a_S|) \leq \alpha(4|x - a|) \leq 4\alpha(|x - a|)$$

por α creciente y cóncavo. En efecto, las funciones cóncavas verifican:

$$\forall \gamma \geq 1, \alpha(\gamma t) \leq \gamma \alpha(t)$$

Por el comentario anterior:

$$\exists C = C(m, n) : \forall \{f^l\}_{|l| \leq m} \in J^m(K), \forall a \in K, |D^k t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x) - D^k t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x)| \leq C\alpha(|a - a_S|)$$

Ahora bien, si $l \neq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \sum_{S \in I} D^l \psi_S(x) = 0 \\ \Rightarrow \forall b \in K, \sum_{S \in I} D^l \psi_S(x) D^{k-l} [t_{a_S}^m \{f^j\}_{|j| \leq m}(x) - t_a^m \{f^j\}_{|j| \leq m}(x)] &= \sum_{S \in I} D^l \psi_S(x) D^{k-l} [t_{a_S}^m \{f^j\}_{|j| \leq m}(x) - t_a^m \{f^j\}_{|j| \leq m}(x)] \end{aligned}$$

Si tomamos b de tal forma que $|x - b| = d(x, K)$, entonces se tiene la cota:

$$\exists C = C(m, n, \lambda) : \forall |k| \leq m; \forall a \in K, x \in L \cap \text{sop}(\psi_S); |\tilde{f}^k(x) - D^k t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x)| \leq C\alpha(|x - a|)|x - a|^{-|k|}$$

El caso en todo $x \notin K$ se obtiene de la reunión de todos los soportes, cumpliéndose la cota anterior. Para el caso $x \in K$ se obtiene de la definición de $\Xi^m(K)$ y del módulo de continuidad α . Es decir, que se cumple:

$$\exists C = C(m, n, \lambda) : \forall |k| \leq m; \forall a \in K, x \in L; |\tilde{f}^k(x) - D^k t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x)| \leq C\alpha(|x - a|)|x - a|^{m-|k|}$$

6. Escojamos un punto $a \in K$ de forma que $|x - a| = d(x, K)$ y aprovechamos que:

$$\begin{aligned} \forall |k - l| > m, D^k t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x) &= 0 \\ \forall |k - l| > m, D^{k-l} [t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x) - t_a^m \{f^l\}_{|l| \leq m}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

entonces se sigue que:

$$\forall |k| > m, \exists C_k = C_k(k, n, \lambda) : \forall x \in L - K, |D^k f(x)| \leq \frac{C_k \alpha(d(x, K))}{d(x, K)^{|k| - m}}$$

7. Afirmamos que $\tilde{f} \in C^m$ y que $\forall |k| \leq m, D^k \tilde{f} = f^k$.

□