

# Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2026



# Índice

<b>1</b>	<b>Tópicos de Derivación e Integración</b>	<b>1</b>
1	Derivada de Orden Superior . . . . .	1
1.1	Formas multilineales y Tensores . . . . .	1
1.2	Propiedades Básicas . . . . .	6
1.3	Derivación Combinatoria . . . . .	14
2	Integral de Bochner . . . . .	14
2.1	Integral sobre tensores . . . . .	14
2.2	Cálculo sobre espacios de Banach . . . . .	14



# Capítulo 1

## Topología $C^k$

En esta sección trabajamos los puntos de equilibrio no hiperbólicos. Generalizamos los resultados a órbitas periódicas no hiperbólicas.

### 1 Topología desde seminormas

**Definición 1.1** (Formas  $r$ -lineales acotadas). Decimos que una forma  $r$ -lineal  $M \in \text{Mult}^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F)$  con  $E, F$  espacios normados, es acotada si el conjunto

$$\{\|M(v_1, \dots, v_r)\|_F : \|v_i\|_{E_i} = 1\}$$

Es acotado (y por tanto, tiene supremo).

Definimos al conjunto de todas las formas  $r$ -lineales acotadas sobre  $\{E_i\}_{i=1}^r$  hacia  $F$  como  $L^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F)$

**Proposición 1.2** ( $L^r$  Banach). *El espacio vectorial de formas  $r$ -lineales acotadas  $L^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F)$  es un espacio de Banach bajo la norma:*

$$\|\cdot\|_{L^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F)} : M \mapsto \sup\{\|M(v_1, \dots, v_r)\|_F : \|v_i\|_{E_i} = 1\}$$

*Demostración.* □

**Proposición 1.3** ( $L^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F) \cong L(E_{i_0}; L^{r-1}(\{E_i\}_{i=1}^r - \{E_{i_0}\}; F))$ ). *Los espacios vectoriales  $L^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F)$  y  $L(E_{i_0}; L^{r-1}(\{E_i\}_{i=1}^r - \{E_{i_0}\}; F))$  son isomorfos isométricos.*

*Proof.* La biyección preserva norma debido a reescritura dentro del conjunto que determina al supremo en la definición de la norma. □

**Corolario 1.4** ( $L^{r+s}(\{E_i\}_{i=1}^{r+s}; F) \cong L^r(\{E_i\}_{i \in I \subset \{1, \dots, r+s\}}^{\#I=r}; L^s(\{E_i\}_{i \in J = \{1, \dots, r+s\} - I}; F))$ ). *Los espacios vectoriales  $L^{r+s}(\{E_i\}_{i=1}^{r+s}; F)$  y  $L^r(\{E_i\}_{i \in I \subset \{1, \dots, r+s\}}^{\#I=r}; L^s(\{E_i\}_{i \in J = \{1, \dots, r+s\} - I}; F))$  son isomorfos isométricos.*

**Definición 1.5** (Forma multilineal simétrica). Decimos que una forma  $r$ -lineal  $M : \Pi\{E\}_{i=1}^r \rightarrow F$  (esto es,  $M \in \text{Mult}^r(E^r; F)$ ) es simétrica si se verifica que:

$$\forall \sigma \in S_n, M(v_1, \dots, v_r) = M(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})$$

Denotamos el conjunto de formas multilineales simétricas como  $\text{Symm}^r(E; F)$

**Comentario 1.6.** Queremos probar que para formas multilineales simétricas, podemos reducir el cálculo de la norma  $\sup\{\|M(v_1, \dots, v_r)\|_F : \|v_i\|_{E_i} = 1\}$  a  $\sup\{\|M(v, \dots, v)\|_F : \|v\|_E = 1\}$

Esto se intuye al hecho de que el calcular un operador multilinear en término de su base en forma tensorial, luego es expresable como un polinomio formado por los componentes de los vectores que forman parte de la evaluación. Es decir, que al ser expresable como polinomio, pueda ser expresable como uno más sencillo que nos permita realizar la representación matricial.

**Lema 1.7** (Polarización). *Sea  $r \in \mathbb{N}$ , y sea  $M$  una forma  $2r$ -lineal simétrica en  $\mathcal{H}$  espacio con producto interno.*

*Esto es,  $M \in \text{Symm}^{2r}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ .*

*Tenemos:*

$$\sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} M_{2j}(u+v, u-v) = 2^{2r} g_r(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

donde para  $0 \leq i \leq 2r$ :

$$M_i(u, v) := M(u^i, v^{2r-i})$$

Donde la notación es dada por Lages Lima  $u^i = (u, \dots, u) \in \mathcal{H}^i$

*Demostración.* Por inducción, tomamos que para  $r = 1$ , se cumple:

$$\begin{aligned} & (-1)^1 \binom{1}{0} M_0(u+v, u-v) + (-1)^0 \binom{1}{1} M_2(u+v, u-v) \\ & \quad = -M((u-v)^2) + M((u+v)^2) \\ & = -M(u, u-v) + M(v, u-v) + M(u, u+v) + M(v, u+v) \\ & \quad = -M(u, u) + M(u, v) + M(v, u) - M(v, v) \\ & \quad \quad + M(u, u) + M(u, v) + M(v, u) + M(v, v) \\ & \quad = M(u, v) + M(u, v) + M(v, u) + M(v, u) \\ & \quad \quad = 4M(u, v) \end{aligned}$$

Supongamos válido para  $r \leq l$ . Dada una forma simétrica  $M$   $2l+2$ -lineal. Se cumple:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^{l+1-j} \binom{l+1}{j} M_{2j}(u+v, u-v) \\
= & (-1)^{l+1} M_0(u+v, u-v) + \sum_{j=1}^l (-1)^{l+1-j} \left( \binom{l}{j} + \binom{l}{j-1} \right) M_{2j}(u+v, u-v) + M_{2l+2}(u+v, u-v) \\
= & \sum_{j=0}^l (-1)^{l+1-j} \binom{l}{j} M_{2j}(u+v, u-v) + \sum_{k=1}^{l+1} (-1)^{l+1-k} \binom{l}{k-1} M_{2k}(u+v, u-v) \\
= & - \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} M_{2j}(u+v, u-v) + \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} M_{2j+2}(u+v, u-v) \\
= & \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} \left( M_{2j+2}(u+v, u-v) - M_{2j}(u+v, u-v) \right)
\end{aligned}$$

Construyamos el operador multilinear de orden  $2l$  que nos permita aplicar el paso inductivo:

$$\tilde{M}_i(u, v, x, y) := M(u^i, v^{2l-i-2}, x, y)$$

Vemos que se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
M_{2j}(u+v, u-v) &= M((u+v)^{2j}, (u-v)^{2l-2j+2}) \\
&= M((u+v)^{2j}, (u-v)^{2l-2j}, (u-v)^2) \\
&= \tilde{M}_{2j}(u+v, u-v, u-v, u-v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{2j+2}(u+v, u-v) &= M((u+v)^{2j+2}, (u-v)^{2l}) \\
&= M((u+v)^{2j}, (u-v)^{2l}, (u+v)^2) \\
&= \tilde{M}_{2j}(u+v, u-v, u+v, u+v)
\end{aligned}$$

Con la tercera igualdad de la última línea justificada por simetría de  $M$

Además, sabemos que  $M(\cdot, \dots, \cdot, x, y)$  es una forma simétrica  $2l$ -lineal y  $\tilde{M}_i(u, v; \cdot, \cdot)$  es una forma simétrica bilineal, en efecto:

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_i(u, v, \alpha x_1 + x_2, y) &:= M(u^i, v^{2l-i-2}, \alpha x_1 + x_2, y) \\
&= \alpha M(u^i, v^{2l-i-2}, x_1, y) + M(u^i, v^{2l-i-2}, x_2, y) \\
&= \alpha \tilde{M}_i(u, v, x_1, y) + \tilde{M}_i(u, v, x_2, y)
\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando en la ecuación original:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^{l+1-j} \binom{l+1}{j} M_{2j}(u+v, u-v) \\
&= \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} \left( M_{2j+2}(u+v, u-v) - M_{2j}(u+v, u-v) \right) \\
&= \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} \left( \tilde{M}_{2j}(u+v, u-v, u+v, u+v) - \tilde{M}_{2j}(u+v, u-v, u-v, u-v) \right) \\
&= 2^{2l} \tilde{M}_l(u, v, u+v, u+v) - 2^{2l} \tilde{M}_l(u, v, u-v, u-v) \\
&= 2^{2l} M(u^l, v^{l-2}, u+v, u+v) - 2^{2l} M(u^l, v^{l-2}, u-v, u-v) \\
&= 2^{2l} M(u^{l+2}, v^{l-2}) + 2^{2l} M(u^{l+1}, v^{l-1}) + 2^{2l} M(u^l, v^l) \\
&\quad - 2^{2l} M(u^{l+2}, v^{l-2}) + 2^{2l} M(u^{l+1}, v^{l-1}) - 2^{2l} M(u^l, v^l) \\
&= 2^{2(l+1)} M_{l+1}(u, v)
\end{aligned}$$

Luego se cumple el resultado.  $\square$

**Teorema 1.8** (Norma de F.M.S.). *Sea  $r \in \mathbb{N}$ , y sea  $M$  una forma  $2r$ -lineal simétrica en  $\mathcal{H}$  espacio con producto interno.*

*Esto es,  $M \in \text{Symm}^{2r}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ .*

*La norma del operador multilinear puede escribirse como sigue:*

$$\|M\|_{L^r(\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}, \mathbb{C})} = \sup\{\|M(v_1, \dots, v_r)\|_{\mathbb{C}} : \|v_i\|_{\mathcal{H}} = 1\} = \sup\{\|M(v, \dots, v)\|_{\mathbb{C}} : \|v\|_{\mathcal{H}} = 1\}$$

*Luego se induce la norma simétrica:*

$$\|M\|_{\text{Symm}^r(\mathcal{H}, \mathbb{C})} := \sup\{\|M(v, \dots, v)\|_{\mathbb{C}} : \|v\|_{\mathcal{H}} = 1\}$$

*Demostración.* 1. Trivialmente  $\|M\|_{\text{Symm}^r(\mathcal{H}, \mathbb{C})} \leq \|M\|_{L^r(\mathcal{H}^r; F)}$

(La segunda norma tiene más opciones de dónde obtener el supremo). Luego queremos probar  $\|M\|_{L^r(\mathcal{H}^r; F)} \leq \|M\|_{\text{Symm}^r(\mathcal{H}, \mathbb{C})}$

2. El teorema es válido para  $r = 1$  por definición de norma de transformación lineal (sólo queda un vector en la expresión lineal):

$$\|M\|_{\text{Symm}^1(\mathcal{H}, \mathbb{C})} = \sup\{\|M(v)\|_{\mathbb{C}} : \|v\|_{\mathcal{H}} = 1\} = \|M\|_{L^1(\mathcal{H}, \mathbb{C})}$$

3. Supongamos válido el teorema para  $r \leq l$ .

Sea  $\epsilon > 0$  fijo, arbitrario. Sabemos que:

$$\exists\{u_j\}_{j=1}^{l+1} \subseteq \mathcal{H} : \|u_j\| = 1 \wedge |M(u_1, \dots, u_{l+1})| \geq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} - \epsilon$$

(En efecto, el valor del lado derecho de la desigualdad es menor que la norma simétrica, por tanto existe un vector que al aplicársele la forma sobre su repetición,

será mayor igual, si no lo hubiera, se daría que  $\|M\|_{L^r(\mathcal{H}^r; F)} - \epsilon \geq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} - \epsilon$  es cota superior menor a la dada por la norma no simétrica, contradiciendo la definición de supremo. La multiplicidad es dada por no imponer que deban ser distintos, y que la norma es 1 por argumento anterior).

4. Denotemos  $U := \langle \{u_j\} \rangle$  generado.

Queremos probar que:

$$\|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(U, \mathbb{C})} \geq \|M\|_{L^{l+1}(U^r, \mathbb{C})} \geq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} - \epsilon$$

Si fuera el caso:

$$\epsilon \geq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} - \|M\|_{L^{l+1}(U^r, \mathbb{C})} \geq 0$$

Sabemos que  $\|M\|_{L^{l+1}(U^r, \mathbb{C})} \leq \|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}^r, \mathbb{C})}$  (por haber más vectores posibles)

Supongamos que la desigualdad sea estricta, entonces definamos  $d := \|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}^r, \mathbb{C})} - \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} > 0$

Sabemos que podemos obtener una secuencia de vectores que aproximen según supremo a la norma del operador multi-lineal. Por tanto, podemos denotar a la secuencia de subespacios asociados como antes según  $\{U_n\}$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M\|_{L^{l+1}(U_n^r, \mathbb{C})} = \|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}^r, \mathbb{C})}$$

Pero  $\|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}^r, \mathbb{C})} \leq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})} \Rightarrow \|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}^r, \mathbb{C})} \leq \|M\|_{\text{Symm}^{l+1}(\mathcal{H}, \mathbb{C})}$

Por motivos computacionales, supondremos que:

$$\|M\|_{L^{l+1}(U^r, \mathbb{C})} = 1$$

(Basta dividir el operador entre la norma y por definición se obtiene el resultado)

5. Sea  $1 \leq k < l + 1$ , por hipótesis inductiva y aprovechando que fijandos los últimos  $l - k$  términos, la forma se vuelve  $k$ -lineal:

$$\sup\{\|M(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{l+1})\|_{\mathbb{C}} : \|v_i\|_U = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}\} = \sup\{\|M(v, \dots, v, v_{k+1}, \dots, v_{l+1})\|_{\mathbb{C}} : \|v\|_U = 1, \|v_i\|_U = 1 \ \forall i \in \{k+1, \dots, l+1\}\}$$

Además, se tiene que por reescritura:

$$\begin{aligned} 1 &= \|M\|_{L^{l+1}(\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}, \mathbb{C})} = \sup\{\|M(v, \dots, v, v_{k+1}, \dots, v_{l+1})\|_{\mathbb{C}} : \|v\|_U = 1, \|v_i\|_U = 1 \ \forall i \in \{k+1, \dots, l+1\}\} \\ &= \sup\{\|M_k(v, u)\|_{\mathbb{C}} : v, u \in \mathcal{H}, \|u\|_U = \|v\|_U = 1\} \end{aligned}$$

Donde:

$$M_i(u, v) := M(u^i, v^{l+1-i})$$

6. Definamos:

$$V := \{(u, v) \in U^2 : \|u\| = \|v\| = 1, (\exists k \in \{1 \dots l\} : \|M_k(u, v)\| = 1)\}$$

Como  $\dim U < \infty$ . Tenemos que la esfera unitaria es compacta (Análisis Funcional) y que la función es continua  $M_k$ , luego alcanza máximo y al obtenerlo como en la ecuación como supremo, en la segunda línea de hace 2 ecuaciones de Latex atrás, se vuelve máximo y por tanto  $V \neq \emptyset$ .

7. Definimos:

$$\gamma := \max\{\|\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}\|_{\mathbb{C}} : (u, v) \in V\}$$

Escojamos  $(u, v) \in V$  y  $k \in \mathbb{N}$ , de forma que  $1 \leq k \leq l$ ,  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma$  y  $\|M_k(u, v)\| = 1$ . (Uno que haga cumplir la definición de  $\gamma$ )

Definamos auxiliariamente:

$$\tilde{M}_{i,j}(u, v, w) := M(u^i, v^{2j-i}, w^{l+1-2j})$$

8. Supongamos  $k \leq \frac{n}{2}$ . Por Lema, para la forma  $2k$ -lineal  $M(\cdot, \dots, \cdot, v^{l+1-2k})$ :

$$\begin{aligned} 2^{2k} &= 2^{2k} \|M_k(u, v)\|_{\mathbb{C}} = \left\| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} M((u+v)^{2j}, (u-v)^{2k-2j}, v^{l+1-2k}) \right\|_{\mathbb{C}} \\ &= \left\| \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v) \right\|_{\mathbb{C}} \\ &\leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|\tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v)\|_{\mathbb{C}} \\ &\leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|\tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v)\|_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Ahora bien, usemos la siguiente desigualdad (Válida por norma de  $M$ ):

$$\begin{aligned} \|\tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v)\|_{\mathbb{C}} &\leq \|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2(k-j)} \|v\|_{\mathbb{C}}^{l+1-2k} \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|\tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v)\|_{\mathbb{C}} &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2(k-j)} \end{aligned}$$

Continuando con las desigualdades:

$$\begin{aligned}
2^{2k} &\leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|\tilde{M}_{2j,k}(u+v, u-v, v)\|_{\mathbb{C}} \\
&\leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2(k-j)} \\
&= \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2(k-j)}
\end{aligned}$$

Usando la polarización:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2k-2j} &= \| \|u\|_{\mathbb{C}}^2 + \|v\|_{\mathbb{C}}^2 + 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \|_{\mathbb{C}}^j \cdot \| \|u\|_{\mathbb{C}}^2 + \|v\|_{\mathbb{C}}^2 - 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \|_{\mathbb{C}}^{k-j} \\
&= \|2 + 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \|_{\mathbb{C}}^j \cdot \|2 - 2\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \|_{\mathbb{C}}^{k-j} \\
&\leq (2 + 2\gamma)^j (2 - 2\gamma)^{k-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{2k} &\leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|u+v\|_{\mathbb{C}}^{2j} \|u-v\|_{\mathbb{C}}^{2(k-j)} \\
&\leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (2 + 2\gamma)^j (2 - 2\gamma)^{k-j} \\
&= \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} + (2 + 2\gamma + 2 - 2\gamma)^k \\
&= \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} + 2^{2k} \\
&\Rightarrow 0 \leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} - \|u+v\|^{2k} \\
&\Rightarrow \|u+v\|^{2k} \leq \|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} \leq \|u+v\|^{2k}
\end{aligned}$$

La conclusión de todo lo anterior se resume en:

$$\begin{aligned}
\|M((u+v)^{2k}, v^{l+1-2k})\|_{\mathbb{C}} &= \|u+v\|^{2k} \\
\Rightarrow \|M\left(\frac{u+v}{\|u+v\|_{\mathbb{C}}}, v^{l+1-2k}\right)\|_{\mathbb{C}} &= 1 \\
&\Rightarrow (u+v, v) \in V
\end{aligned}$$

9. Si  $2k = l + 1$ , trivialmente se cumple por la última igualdad que el vector  $\frac{u+v}{\|u+v\|_{\mathbb{C}}}$  es el que alcanza el supremo dado por la otra norma.

Si  $2k < l + 1$ :

Recordemos de la polarización:

$$2(\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} + 1)^2 = 2(\gamma + 1)^2 = \|u + v\|_{\mathbb{C}}^2(\gamma + 1)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{u + v}{\|u + v\|_{\mathbb{C}}}, v \right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\|u + v\|_{\mathbb{C}}} \langle u + v, v \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\|u + v\|_{\mathbb{C}}} (\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} + 1) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} \leq \gamma$$

Con lo último debido a que  $\gamma$  es definido como el máximo de los valores.

Esto sólo sucede si  $0 \leq 2\gamma^2 - \gamma - 1 = (\gamma - 1)(\gamma + \frac{1}{2})$  lo cual sólo es posible para  $1 \leq \gamma = |\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|u\| \cdot \|v\| = 1$ .

De donde  $\gamma = 1$

Tenemos:

$$\|u - v\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(-\gamma + 1) = 0 \Rightarrow u = v$$

Finalmente se concluye  $\|M_k(u, v)\|_{\mathbb{C}} = \|M(u^n)\|_{\mathbb{C}} = 1$  de donde se concluye que se alcanza el máximo en el valor  $u^n$ .

10. Es decir, obtuvimos la cota para el caso finito, por argumento anterior se sigue el resultado. □

**Comentario 1.9.** Toda la prueba anterior es dada en el artículo T. Muramatu and S. Wakabayashi de On the norms of a symmetric multilinear form.

Si bien este trabajo ya se ha demostrado en el trabajo sobre formas bilineales y dado trivialmente como posible en general. La presentación del artículo es la más concisa y nuestra caracterización es sólo un desarrollo del mismo.

La idea detrás de la demostración fue considerar una aproximación a partir de vectores, garantizada por supremo, luego tomando el generado dicha aproximación está definida en un subespacio e induce una norma, luego demostrando la cota (utilizando polarización) en ese subespacio finito (con lo cual podemos aprovechar compacidad), se obtendrá la cota en el espacio general.

**Comentario 1.10.** Vamos poner de manifiesto el proceso mediante el cual hallaremos la norma de un operador multilineal simétrico sobre  $\mathbb{K}$  descrito en forma tensorial como:

$$M(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1, \dots, i_r} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r}$$

Esta representación no admite expresión matricial en el sentido clásico.

Sería una sucesión finita de matrices iteradas y su computación, por extremo difícil.

Además, para llevar a cabo una representación numérica, tenemos el problema de que el polinomio es por demás complejo.

Ahora, para llevarlo a un cálculo sencillo, al menos sobre la norma, tomaremos todos los vectores como el mismo. Es decir, sólo nos importarán las coordenadas del vector  $v$ :

$$M(v, \dots, v) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1, \dots, i_r} v^{i_1} \dots v^{i_r}$$

El cual es un polinomio simétrico de  $r$  variables.

Supongamos que el espacio de llegada sea  $\mathbb{K}^m$ . En ese caso tendremos que:

$$M(v, \dots, v) = \begin{pmatrix} M^{(1)}(v, \dots, v) \\ \vdots \\ M^{(m)}(v, \dots, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1, \dots, i_r}^1 v^{i_1} \dots v^{i_r} \\ \vdots \\ \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1, \dots, i_r}^m v^{i_1} \dots v^{i_r} \end{pmatrix}$$

Queremos hallar la norma de dicho vector en  $\mathbb{K}^m$ . Para esto, queremos:

$$\begin{aligned} \|M\|_{\text{Symm}^r(\mathcal{H}, \mathbb{C}^n)} &= \sup\{\|M(v, \dots, v)\|_{\mathbb{K}^n} : \|v\|_{\mathcal{H}} = 1\} \\ &= \sup\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{K}}^2} : \|v\|_{\mathcal{H}} = 1\right\} \end{aligned}$$

Si tomamos  $\mathcal{H} = \mathbb{K}^n$ :

$$\begin{aligned} \|M\|_{\text{Symm}^r(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)} &= \sup\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{K}}^2} : \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|_{\mathbb{K}}^2} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{K}}^2} : \sum_{i=1}^n |v_i|_{\mathbb{K}}^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

Este problema es maximizar una función de composición de la norma con una función polinomial sobre  $\mathbb{R}^n$ , la cual está sujeta a restricción polinomial. Esto es un ejercicio sencillo de Análisis.

**Teorema 1.11** (Teorema de los Multiplicadores de Lagrange). *Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$ . Sean  $x_0 \in U$ ,  $r := g(x_0)$ ,  $S_r := g^{-1}(r)$  conjunto de nivel  $r$  de  $g$ .*

*Supongamos que  $\nabla g(x_0) \neq 0$  y que  $f|_{S_r}$  tiene máximo o mínimo en  $x_0$ . Entonces:*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

*Demostración.* Se encuentra en Daniel Azagra Rueda. □

**Comentario 1.12.** Notemos que  $g$  determina la curva de nivel como la restricción según su pre imagen. Como la restricción en nuestro problema está dada por:

$$\sum_{i=1}^n |v_i|_{\mathbb{K}}^2 = 1$$

Podemos definir la función  $g(v) = \|v\|^2$  con la curva de nivel  $S_1$ .

Queremos maximizar la función  $f(v) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{K}}^2}$ .

Por lo tanto, como  $S_1 = g^{-1}(\{1\})$  es compacto ( $S_1 = \partial B_1(0)$ ) entonces  $f$  continua alcanza su máximo.

De donde:

$$\begin{aligned}
\nabla f(v) &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{R}}^2}} \sum_{i=1}^m (\operatorname{sgn}(M_i(v, \dots, v))) \frac{\partial}{\partial x_j} M_i(v, \dots, v) \Big|_{j=1}^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{R}}^2}} \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(M_i(v, \dots, v)) \nabla \left( \sum_{\{k_h\}_{h=1}^r \subseteq K} T_{k_1, \dots, k_r} v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \|M_i(v, \dots, v)\|_{\mathbb{R}}^2}} \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(M_i(v, \dots, v)) \left( \sum_{\{k_h\}_{h=1}^r \subseteq K} T_{k_1, \dots, k_r} \nabla v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r} \right)
\end{aligned}$$

Además:

$$\lambda \nabla g(v) = \lambda \nabla \|v\| = \lambda \frac{1}{2\|v\|} 2v = \lambda v$$

Luego  $\frac{1}{\lambda} \nabla f(v) = v \Rightarrow \pm \frac{1}{\|\nabla f(v)\|} \nabla f(v) = v$  aplicando norma en ambos lados y tomando el valor de  $\lambda$ , entonces el máximo está dado por resolver el sistema de ecuaciones algebraicas dadas por  $\pm \frac{1}{\|\nabla f(v)\|} \nabla f(v) = v$ . Podemos usar los métodos computacionales usuales o aprovechar la forma de los componentes para encontrar solución.

**Definición 1.13** (Norma  $C^r(K)$ ). Definimos la norma  $C^r(K)$  para funciones definidas sobre un abierto ( $f : U \subseteq \tau_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) de clase  $C^r(U)$  (con  $K \subseteq U$  conjunto compacto) como:

$$\|f\|_{r,K} := \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \{\|D^j f(x)\| : x \in K\}$$

Alternativamente, puede usarse la norma con respecto de la suma:

$$\|f\|_{s,r,K} := \sum_{j=0}^r \|D^j f(x)\|$$

Ambas están bien definidas por derivada siendo una forma  $r$ -lineal en  $L^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .

**Comentario 1.14.** 1. La norma de la definición anterior sobre la derivada  $j$ -ésima es mejor descrita según:

$$\|D^j f(x)\|_{L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \sqrt{\sum_{h=1}^m \|D^j f_h(x)\|_{\operatorname{Symm}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}^2}$$

En ese sentido, el cálculo de la norma queda dado inmediatamente por trabajo anterior. Sabemos que las derivadas son polinomios aplicados sobre  $j$  números, las componentes de  $v$ , con estos bajo la restricción  $\|v\| = 1$ , de donde podemos utilizar multiplicadores de Lagrange para obtener la ecuación algebraica inducida en cada uno de ellos, definiendo  $g(v) = \sqrt{\sum_{h=1}^m \|D^j f_h(x) v^j\|_{\mathbb{R}}^2}$  y forzando a que  $\pm \frac{1}{\|g(v)\|} \nabla g(v) = v$ .

Es decir, buscando las soluciones de la ecuación algebraica:

$$\pm \frac{1}{\|\nabla \sqrt{\sum_{h=1}^m \|D^j f_h(x) v^j\|_{\mathbb{K}}^2}\|} \nabla \sqrt{\sum_{h=1}^m \|D^j f_h(x) v^j\|_{\mathbb{K}}^2} = v$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas tiene solución garantizada por  $f$  teniendo máximo garantizado y las derivadas no nulas. Si fuera el caso que  $\nabla \sqrt{\sum_{h=1}^m \|D^j f_h(x) v^j\|_{\mathbb{K}}^2}$  nulo, entonces la función no tiene crecimiento máximo en función de  $v$  y por tanto, según el cálculo explícito de  $\nabla g$ , se tiene que se anula sobre  $v^j$  (Ver comentario 1.29). Luego éste método sólo es útil para derivadas de orden superior no nulas.

Es decir, que si tenemos derivadas de orden superior nulas, la norma viene dada automáticamente por el valor 0, si fuera que son no nulas. El método ya explicado funciona perfectamente y nos da solución.

2. La equivalencia de ambas normas queda dada por tomar las desigualdades:

$$\|f\|_{S,r,K} = \sum_{j=0}^r \|D^j f(x)\| \leq (r+1) \|f\|_{r,K}$$

$$\|f\|_{r,K} = \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \{\|D^j f(x)\| : x \in K\} \leq \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \{\|D^j f(x)\| : x \in K\} + \left( \sum_{j=0}^r \|D^j f(x)\| - \max_{j \in \{0, \dots, r\}} \{\|D^j f(x)\| : x \in K\} \right)$$

De donde resulta la equivalencia:

$$\|f\|_{r,K} \leq \|f\|_{S,r,K} \leq (r+1) \cdot \|f\|_{r,K}$$

Luego ambas definen la misma topología.

3. El problema de definir la norma sobre compactos y no sobre abiertos radica en que la derivada no tiene por qué alcanzar un máximo en un abierto, sino que puede tender al infinito o no existir (Basta ver ejemplos sobre  $\mathbb{R}$ , como es el caso de  $\frac{1}{x}$ ).

Como en la clase  $C^r$  sólo garantizamos que las derivadas sean continuas bajo las topologías usuales de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que las funciones  $\|\cdot\|$  y  $Df^j(\cdot)$  son continuas, luego su composición resulta en una función continua. De donde se sigue que la función  $\|Df^j(\cdot)\|$  sea continua, y alcanza un máximo en cualquier compacto  $K \subseteq U$ .

De donde se tiene la buena definición, pero no son normas dentro de la totalidad de  $U$

**Comentario 1.15.** El problema de definir la norma sobre compactos y no sobre abiertos radica en que la derivada no tiene por qué alcanzar un máximo en un abierto (Basta ver ejemplos sobre  $\mathbb{R}$ , tomemos  $\frac{1}{x}$ ), sino que puede tender al infinito.

**Definición 1.16** (Espacio vectorial topológico). Decimos que un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial dotado de una topología  $(\mathbb{V}, \tau)$  que cumple  $T_1$  (axioma de separación que fuerza a los puntos a ser conjuntos cerrados), es un espacio vectorial topológico si las operaciones  $+_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ ,  $\cdot_{\mathbb{V}} : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  son continuas con respecto de  $\tau$  y  $\tau_{\mathbb{K}}$  topología de  $\mathbb{K}$

**Teorema 1.17** (E.V.T. con base local numerable es metrizable). *Todo espacio vectorial topológico  $(\mathbb{V}, \tau)$  con base local (del origen) numerable admite una métrica  $d$  compatible con la topología de  $\tau$ , con  $d$  invariante por translaciones.*

*Además, si  $(\mathbb{V}, \tau)$  es localmente convexo, entonces  $d$  puede tomarse verificando lo anterior y con todas las bolas abiertas convexas.*

*Demostración.* Del texto de Rudin □

**Definición 1.18** (Seminormas y familias que separan puntos). Una seminorma sobre un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{V}$  es una función  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X, \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$
2.  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Se dice de una familia de seminormas  $\mathcal{P}$  que separa puntos si:

$$\forall x \in \mathbb{V} - \{0\}, \exists p \in \mathcal{P} : p(x) \neq 0$$

**Comentario 1.19.** Notar que la diferencia entre la seminorma y la norma es el hecho de que  $\rho(x) = 0 \not\Rightarrow x = 0$ . Es decir, que si una seminorma no es norma, hay elementos que están sobreponiéndose al origen (en la "topología" inducida)

Además, una familia de seminormas separan puntos si todo punto puede encontrar una seminorma que no lo sobreponga al origen. Esto es, que lo distinga por un valor

**Comentario 1.20.** Las seminormas son el mínimo caso posible para los resultados que queremos de ellas. Las siguientes demostraciones se encuentran en el texto de Rudin, Functional Analysis

**Proposición 1.21** ( $\exists \tau_{\mathcal{P}}$ ). *Sea  $\mathcal{P}$  familia de seminormas definidas sobre un espacio vectorial  $\mathbb{V}$ :*

*Asociamos a cada  $(\rho, n) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}$  el conjunto:*

$$V(\rho, n) := \{x \in \mathbb{V} : \rho(x) < \frac{1}{n}\} = \rho^{-1}((-\infty, \frac{1}{n})) \subseteq \mathbb{V}$$

*Entonces*

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{j \in J} V(\rho_j, n_j) : |J| < \infty, (\rho_j, n_j) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{V})$$

*es una base local (del origen) convexa para la topología localmente convexa  $\tau$  a la cual induce, verificando que:*

1.  $\rho \in \mathcal{P}$  es continua bajo  $\tau$
2.  $E \subseteq \mathbb{V}$  acotado  $\iff \forall \rho \in \mathcal{P}, \rho$  acotada en  $E$

*Además, si  $\mathcal{P}$  es numerable, entonces  $\tau$  es metrizable bajo*

$$d(x, y) = \max_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \rho_i(x - y)}{1 + \rho_i(x - y)}$$

*Demostración.* 1. Sea  $A \subseteq \mathbb{V}$ . La topología que deseamos es inducida según:

$$\tau_0 := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{V}) : A = \bigcup_{(x,B) \in \mathbb{V} \times \mathcal{B}} (x + B)\}$$

2. Es evidente que  $(\mathbb{V}, \tau_0)$  es un espacio topológico, basta usar teorema de caracterización de base a partir de intersecciones finitas de familias de conjuntos arbitrarios (los cuales son la subbase de la topología).

3. Es invariante por translaciones, es decir:

$$\begin{aligned} \left( x_0 + U \in x_0 + \tau_0 \iff x_0 + U = x_0 + \bigcup_{(x,B) \in \mathbb{V} \times \mathcal{B}} (x + B) = \bigcup_{(x,B) \in \mathbb{V} \times \mathcal{B}} (x_0 + x + B) \right. \\ \left. = \bigcup_{(x,B) \in \mathbb{V} \times \mathcal{B}} ((x_0 + x) + B) \in \tau_0 \right) \\ \Rightarrow (x_0 + \tau_0 = \tau_0) \end{aligned}$$

4.  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $B$  convexo:

$$\begin{aligned} x, y \in B = \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) &\Rightarrow \forall j \in J, \max \rho_j(x), \rho_j(y) < n_j \\ &\Rightarrow \forall j \in J, \rho_j(tx + (1-t)y) \leq t\rho_j(x) + (1-t)\rho_j(y) \leq t \max \rho_j(x), \rho_j(y) \\ &\Rightarrow \forall j \in J, \rho_j(tx + (1-t)y) < n_j \\ &\Rightarrow tx + (1-t)y \in \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) = B \end{aligned}$$

5.  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $B$  equilibrado:

$$\begin{aligned} \lambda \in \overline{B_1(0)}, x \in B = \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) &\Rightarrow \forall j \in J, \rho_j(x) < n_j \\ &\Rightarrow \forall j \in J, \rho_j(\lambda x) = |\lambda| \rho_j(x) \leq \rho_j(x) < n_j \\ &\Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) = B \end{aligned}$$

6.  $\mathcal{B}$  base local para  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned}
0 \in U \in \tau_0 &\Rightarrow U = \bigcup_{(x,B) \in \mathbb{V} \times \mathcal{B}} (x + B) \\
&\Rightarrow \exists x, B = \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) : 0 \in x + \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) \\
&\Rightarrow \exists x, |J| < \infty : \rho_j(0) \leq \rho_j(x) < n_j \\
&\Rightarrow 0 \in \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) \\
&\Rightarrow 0 \in B \\
&\Rightarrow \exists B \subseteq \mathcal{B} : B \subseteq U
\end{aligned}$$

7. El espacio vectorial es topológico:

(a) Cumple  $T_1$ :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{V} - \{0\} \exists \rho \in \mathcal{P} : \rho(x) > 0 \\
&\Rightarrow \lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1 > \frac{1}{\rho(x)} \\
&\Rightarrow \rho(x) (\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1) > 1 \\
&\Rightarrow \rho(x) > \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1} \\
&\Rightarrow x \notin V(\rho, \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1}) \\
&\Rightarrow 0 \notin -x + V(\rho, \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1}) = -1(-x + V(\rho, \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1})) = x - V(\rho, \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\rho(x)} \rfloor + 1})
\end{aligned}$$

Supongamos que  $x \in \overline{\{0\}} \Rightarrow$  toda vecindad de  $x$  contiene a 0. Lo cual no es el caso, luego ningún no nulo arbitrario está en la cerradura, por tanto  $\overline{\{0\}} \subseteq \{0\} \Rightarrow \overline{\{0\}} = \{0\}$  entonces cumple  $T_1$  (es invariante por translaciones y las translaciones de los conjuntos abiertos  $\mathbb{V} - \{0\}$  son los conjuntos abiertos de la forma  $\mathbb{U} - \{p\}$ ).

(b) Suma es continua:

$$\begin{aligned}
U = \mathcal{V}_{(\mathbb{V}, \tau_0)}(0) &\Rightarrow \exists \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} V(\rho_j, n_j) \subseteq U \\
&\Rightarrow \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_j}\right)\right) \subseteq U \\
&\Rightarrow \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \left( \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) + \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) \right) \subseteq \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n_j}\right)\right) \\
&\Rightarrow \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) + \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) \subseteq U \\
&\Rightarrow \exists V = \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) : V + V \subseteq U
\end{aligned}$$

(c) Producto es continuo:

Sea  $x \in \mathbb{V}$ ,  $U$  como antes. Como  $V = \bigcap_{j \in J, |J| < \infty} \rho_j^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{2n_j}\right)\right) \in \mathcal{B}$ , entonces:

$$\exists s > 0 : \rho\left(\frac{1}{s}x\right) = \frac{1}{s}\rho(x) < \min_{j \in J} \left\{ \frac{1}{2n_j} \right\} \Rightarrow \exists s > 0 : x \in sV$$

Definamos  $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$ :

$$\begin{aligned}
(y \in x + tV \wedge |\beta - \alpha| < \frac{1}{s}) &\Rightarrow \beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \in \beta tV + (\beta - \alpha)sV = |\beta|e^{\arg} \\
&\Rightarrow \beta y - \alpha x \in |\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subseteq V + V \subseteq U
\end{aligned}$$

Luego para toda vecindad de la imagen hay una vecindad de la pre imagen  $(x + tV) \times B_{\frac{1}{s}}(\alpha)$  contenida en la imagen. Por tanto es continua.

8. Por ser E.V.T. y por tener base local formada por convexos equilibrados, es un espacio topológico localmente convexo.

9.  $\rho \in \mathcal{P}$  es continua bajo  $\tau_0$ :

Basta ver que  $V(\rho, n) = \rho^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right)$  abierto, luego tomando la base  $\left(-\infty, \frac{1}{n_j}\right)$  de la topología de  $\mathbb{R}$ , podemos obtener que todo abierto en  $\mathbb{R}$  es enviado por pre imagen a un abierto. Por tanto es continua.

10.  $E$  acotado, entonces  $\rho \in \mathcal{P}$  acotado en  $E$ :

$$V(\rho, 1) \in \mathcal{V}_{\mathbb{V}, \tau_0} \Rightarrow \exists t > 0 : E \subseteq tV(\rho, 1) \Rightarrow \forall x \in E, \rho\left(\frac{1}{t}x\right) < 1 \Rightarrow \forall x \in E, \rho(x) < t$$

11.  $\mathcal{P}$  es numerable, entonces  $d$  métrica compatible con  $\tau_0$ :

Por teorema anterior,  $\mathcal{B}$  induce topología metrizable bajo  $d$

Bajo esta topología, las bolas son conjuntos convexos, equilibrados.

Además, forman una base local equilibrada.

En efecto, definamos directamente la métrica y verifiquemos las propiedades:

$$d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}$$

donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

(a) Métrica:

Está bien definida por secuencia  $\frac{c_n p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq c_n \rightarrow 0$  luego es secuencia acotada y por tanto alcanza supremo.

Verificando la primera propiedad:

$$d(x, x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - x)}{1 + p_i(x - x)} = 0$$

Por norma separando puntos  $\exists i \in \mathbb{N} : p_i(x - z) \neq 0$ . De donde:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - z)}{1 + p_i(x - z)} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i}{\frac{1}{p_i(x-z)} + 1} \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i}{\frac{1}{p_i(x-y) + p_i(y-z)} + 1} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i (p_i(x - y) + p_i(y - z))}{1 + p_i(x - y) + p_i(y - z)} \\ &= \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y) + p_i(y - z)} + \frac{c_i p_i(y - z)}{1 + p_i(x - y) + p_i(y - z)} \\ &\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)} + \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i p_i(y - z)}{1 + p_i(y - z)} \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

La positividad es dada trivialmente de la positividad de las seminormas.

(b) Invariante por translaciones: Inmediato usando  $\rho_i(x + z - (y + z)) = \rho_i(x - y)$

(c) Las bolas abiertas centradas en el origen bajo la métrica forman una base local convexa equilibrada para  $\tau$ :

$$\text{Si } c_i \leq r \Rightarrow c_i \frac{\rho_i}{1 + \rho_i} \leq r \Rightarrow c_i \frac{1}{\frac{1}{\rho_i} + 1} \leq r \Rightarrow \rho_i \leq \frac{1}{\frac{c_i}{r} - 1} = \frac{r}{c_i - r}.$$

Esto se cumple por el hecho de que  $c_i \rightarrow 0$  escogiendo  $r > 0$  y tomando  $i_0$  a partir del cual verifica.

Entonces:

$$\begin{aligned}
B_r(0) &= \{x \in \mathbb{V} : d(x, 0) < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{V} : \frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{V} : \left\{ \frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} \right\}_{i=1}^{i_0-1} < r \wedge \left\{ \frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} \right\}_{i \in \mathbb{N}_{\geq i_0}} < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{V} : \left\{ \frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} \right\}_{i=1}^{i_0-1} < r\} \\
&= \{x \in \mathbb{V} : \forall i \in \{1, \dots, i_0 - 1\}, \rho_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{i_0-1} \{x \in \mathbb{V} : \rho_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{i_0-1} V(\rho_i, \frac{c_i}{r} - 1)
\end{aligned}$$

Donde  $i_0$  determinado a partir de los  $c_i$  que son acotados por  $r$ . Es decir, que si  $r \geq \sup\{c_n\}$  entonces  $B_r(0) = \mathbb{V}$  y a medida que se va disminuyendo hasta obtener  $c_1 > r, \dots$  se obtiene una intersección de  $V(\rho_i, \frac{c_i}{r} - 1)$  hasta que  $c_i \leq r$  para todos los demás.

Luego es intersección de abiertos, es convexo y equilibrado.

Además,  $B_r(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow$  forma base local por toda vecindad del origen de la forma de intersección de  $V(\rho_i, n_i)$  entonces tomando  $r$  suficientemente pequeño se obtiene el resultado.

□

**Comentario 1.22.** Si existe algo que podamos rescatar del Teorema, es la caracterización de bolas abiertas bajo esta métrica. En efecto:

$$B_r(0) = \bigcap_{i=1}^{i_0-1} V(\rho_i, \frac{c_i}{r} - 1)$$

Luego, debido a que la métrica es invariante por translaciones, tenemos:

$$B_r(x) = x + B_r(0) = x + \bigcap_{i=1}^{i_0-1} V(\rho_i, \frac{c_i}{r} - 1)$$

**Definición 1.23** (Agotamiento por compactos). Dado un espacio topológico  $(X, \tau)$ , un agotamiento por compactos es una familia numerable de subconjuntos compactos no vacíos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que verifica:

1.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = X$$

2.

$$K_n \subseteq K_{n+1}$$

**Teorema 1.24** (Agotamiento por compactos). *Todo conjunto abierto de una variedad, admite un agotamiento por compactos.*

*Demostración.* □

**Proposición 1.25** (Topología  $C^k$ ). *Sea  $U \in \tau_{\mathcal{R}^n}$  y  $\{K_M\}_{M \in \mathcal{M}}$  un agotamiento por compactos de  $U$ . La familia  $\mathcal{P}$  de seminormas definida sobre  $C^k(U)$*

$$\mathcal{P} := \left\{ \left( \rho_M : C(U) \rightarrow \mathcal{R} \right) : \rho_M(f) := \max\{\|D^n f(x)\| : (x \in K_M) \wedge (n \in \{0, \dots, k\})\} \right\}$$

*induce una topología metrizable por:*

$$d(f, g) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \rho_M(f - g)}{1 + \rho_M(f - g)}$$

*La cual es localmente convexa, de base local numerable.*

**Comentario 1.26.** Si suponemos que el conjunto  $U$  es compacto y quisieramos obtener la topología  $C^k$  del conjunto:

$$C_b^k(U) := \{f \in C^k(U) : \exists \|f\|_{k,U} < \infty\}$$

Podemos tomar el agotamiento por compactos trivial  $K_M = U$ , de donde se cumple que las seminormas están dadas por  $\rho_M(f) = \|f\|_{k,U}$ . De esto, se deduce que la métrica está dada por:

$$d(f, g) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \rho_M(f - g)}{1 + \rho_M(f - g)} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \|f - g\|_{k,U}}{1 + \|f - g\|_{k,U}} = \frac{\|f - g\|_{k,U}}{1 + \|f - g\|_{k,U}} \sup_{i \in \mathbb{N}} c_i = C \cdot \frac{\|f - g\|_{k,U}}{1 + \|f - g\|_{k,U}}$$

donde  $C \in \mathcal{R}$ .

Ahora bien, sabemos que la métrica en este espacio será equivalente a  $\|f - g\|_{k,U}$ :

$$d(f, g) = C \cdot \frac{\|f - g\|_{k,U}}{1 + \|f - g\|_{k,U}} \leq C \cdot \|f - g\|_{k,U}$$

$$\frac{1}{\|f - g\|_{k,U}} \leq \frac{1}{\|f - g\|_{k,U}} + 1 \Rightarrow \frac{d(f, g)}{C} = \frac{1}{\frac{1}{\|f - g\|_{k,U}} + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\|f - g\|_{k,U}}} = \|f - g\|_{k,U}$$

Analizando el caso  $\|f - g\| = 0$  se llega al resultado.

De donde resulta que la topología  $C_b^k$  para un compacto es la inducida por la norma como métrica.

**Proposición 1.27** (Topología  $C^\infty$ ). *La familia de seminormas sobre  $C^\infty(U)$  (donde  $U$  es un abierto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$ ):*

$$\mathcal{P} := \{p_{N,M}(f) := \max\{\|D^n f(x)\| : (x \in K_M) \wedge (n \in \{0, \dots, N\})\}\}$$

*induce una topología metrizable por:*

$$d(f, g) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i \rho_i(f - g)}{1 + \rho_i(f - g)}$$

*La cual es localmente convexa, de base local numerable.*

**Teorema 1.28** (Caracterización de espacios normables). *Todo E.V.T.  $(\mathbb{V}, \tau)$  es normable si sólo si hay una vecindad convexa acotada del origen.*

*Demostración.* □

**Proposición 1.29** (El espacio  $C^k$  no es normable). *Los espacios  $C^k(U), C^\infty(U)$  dotados de sus respectivas topologías, no son normables*

*Demostración.* Basta suponer que haya una bola abierta convexa acotada para cada espacio con su métrica. □

**Comentario 1.30.** Para lo siguiente, queremos poder estudiar la geometría del espacio de campos de clase  $C^k$  a partir de geometrías más concretas, con las cuales podamos realizar cuentas, a fin de poder entender como una perturbación sobre el campo corresponde a una perturbación sobre los números que caracterizan al espacio concreto.

## 2 Espacio de Funciones

### 3 Topología débil

### 4 Fibrados

### 5 Equivalencia de topologías $C^k$