Preliminares de Tesis

Trinidad Flores Lenin Yassel

Marzo 2023

Índice

1 Tópicos de Derivación e Integración **1**
1 Derivada de Orden Superior 1
1.1 Formas multilineales y Tensores 1
1.2 Propiedades Básicas 6
1.3 Derivación Combinatoria 14
2 Integral de Bochner 14
2.1 Integral sobre tensores 14
2.2 Cálculo sobre espacios de Banach 14

Capítulo 1

Tópicos de Derivación e Integración

1 Derivada de Orden Superior

1.1 Formas multilineales y Tensores

Definición 1.1 (Formas $r-$lineales)**.** Tomando $r \geq 2$, decimos que una función del producto de espacios vectoriales $\{E_i\}_{i\in\{1,2,...,r\}}$ al espacio vectorial F

$$M : \Pi_{i\in\{1,...,r\}}E_i \to F$$

es $r-$lineal si es lineal en cada componente. Es decir, dado $i \in \{1,\ldots,r\}$:

$$\forall v \in \Pi_{j\in\{1,...,i-1\}}E_i \times \{0_{E_i}\} \times \Pi_{j\in\{i+1,...r\}}E_i, , \forall u_i, w_i \in E_i :$$
$$M(v + \alpha u_i + \beta u_i) = \alpha M(v + u_i) + \beta M(v + w_i)$$

Denotamos el conjunto de formas $r-$lineales entre dos espacios como $\mathrm{Mult}^r(E_1,\ldots,E_r;F)$

Notación 1.2. Cuando $r = 1$ las formas son lineales y se denota según la teoría básica del álgebra lineal $\mathrm{Mult}^1(E,F) = \mathrm{Hom}(E,F)$

Cuando para algún r, el mapeo M sea $r-$lineal entre espacios de salida $\{E_i\}_{i\in\{1,2,...,r\}}$ y F; diremos que la forma es multilineal.

Definición 1.3 (Funciones de Medidas)**.** Sea A conjunto y $\mathcal{S}$ familia de conjuntos.

Sea

$$\mathcal{F} = \{g : A \to X \mid X \in \mathcal{S}\}$$

familia de funciones con dominio A y rango un miembro de $\mathcal{S}$.

Sea

$$\mathcal{H} = \{\tau : X \to Y \mid X, Y \in \mathcal{S}\}$$

Familia de funciones con dominio y rango en $\mathcal{S}$.

Asumimos que $\mathcal{H}$ tiene la estructura:

1. $\mathcal{H}$ contiene la función identidad de cada miembro de $\mathcal{S}$. ($\forall X \in \mathcal{S}, Id_X \in \mathcal{S}$)

2. $\mathcal{H}$ is cerrado bajo la operación (asociativa) de composición de funciones.($\mathcal{H}\circ\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$)

3. Dado $\tau \in \mathcal{H}$,$f \in \mathcal{F}$, la composición $\tau \circ f$ es definida y está en $\mathcal{F}$. ($\mathcal{H} \circ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$)

Decimos que la famliia $\mathcal{H}$ es la familia de medidas y sus miembros son funciones de medidas.

Un par $(S, f : A \to S)$, donde $S \in \mathcal{S}$ y $f = \mathcal{F}$, tiene la propiedad universal para la familia $\mathcal{F}$, o es un par universal para $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$, si:

$$\forall (g : A \to X) \in \mathcal{F}, \exists! (\tau : S \to X) \in \mathcal{H} : g = \tau \circ f$$

Si acontece, se dice que todo $g \in \mathcal{F}$ puede ser factorado mediante f.

La única función de medidas τ se dice morfismo mediante para g

Comentario 1.4. La idea central detrás de factorar es poder distinguir con las funciones en los valores de A la información distinta (que vamos a medir). Por tanto lo que g distinga, f distinguirá (y esa distinción o comparación será nuestra medida, que no debe confundirse con teoría de la medida).

Es decir: $f(x) = f(y) \Rightarrow \tau(f(x)) = \tau(f(y)) \Rightarrow g(x) = g(y)$

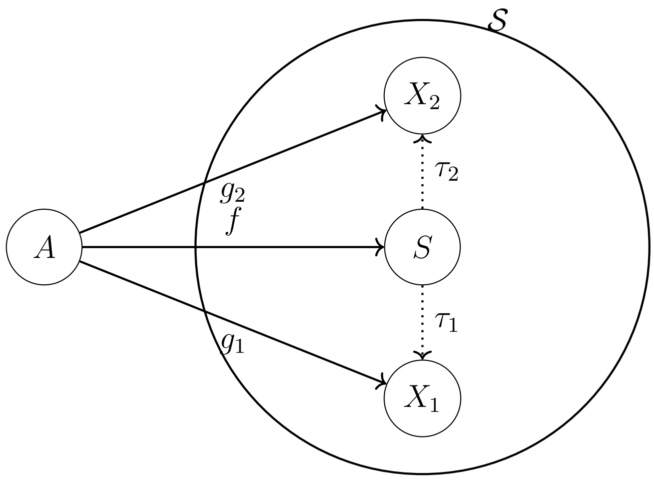
Luego: $g(x) \neq g(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Luego el dato: "x, y son distintos para la función g" implica el dato: "x, y son distintos para la función f".

Si τ es inyectivo, la única diferencia entre f, g es el valor de las etiquetas o valores de imagen.

Normalmente τ puede ser no inyectiva, en cuyo caso f contiene más información que g.

Visualización 1.5. Tomemos el siguiente diagrama para visualizar como $\mathcal{H}$ mide de forma más "universal" la información de los g en $\mathcal{F}$



Con el diagrama se ve que para el par universal, f es el centro de todas las funciones en $\mathcal{F}$. Conteniendo más información que las demás.

Teorema 1.6 (Unicidad de Pares Universales)**.** *Sean* $(S, f : A \to S), (T, g : A \to T)$ *pares universales para* $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$.

Existe una función de medidas biyectiva $\mu \in \mathcal{H}$ *para la cual* $\mu(S) = T$.

El morfismo mediante de f *con respecto de* g *y el morfismo mediante de* g *con respecto de* f *son isomorfismos y son el inverso de cada uno con respecto del otro.*

De acuerdo al diagrama anterior, si tenemos dos centros, podemos crear un isomorfismo (en el sentido de biyectivo y morfismo) entre ellos. (Ambos contienen la misma información y usan etiquetas intercambiables, su única diferencia es el nombre de etiquetas, pero no la información de éstas)

Demostración. Tomemos:

$$f = \sigma \circ g$$
$$g = \tau \circ f$$

Luego introduciendo una en otra obtenemos:

$$g = \tau \circ f = (\tau \circ \sigma) \circ g$$
$$f = (\sigma \circ \tau) \circ f$$

Por definición de par universal, el morfismo mediante es único. Como la identidad es morfismo mediante de f a f y de g a g. Tenemos que los morfismos mediantes σ, τ son inversos a derecha e izq. de cada uno y por tanto son inversos entre sí. □

Definición 1.7 (Par Universal para la Bilinealidad)**.** Sea $U \times V$ el producto cartesiano de dos espacios vectoriales sobre F. Sea $\mathrm{Vect}(F)$ clase de todos los espacios vectoriales sobre F. Sea

$$\mathcal{F} := \bigcup_W \{\mathrm{Mult}^2(U, V; W) \mid W \in \mathcal{S}\}$$

familia de todos los mapeos bilineales de $U \times V$ a cualquier espacio vectorial W.

La familia de medidas $\mathcal{H}$ es la familia de todas las transformaciones lineales (Las formas bilineales envían a espacios vectoriales y el mapeo entre ellos (τ que factora) de tal forma que que se verifiquen las propiedades de representación que buscamos son las transformaciones lineales).

Un par $(T, t : U \times V \to T)$ es universal para la bilinealidad si es universal para $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. Esto es, si $\forall f : U \times V \to W \in \mathrm{Mult}^2(U, V; W) \exists! \tau : T \to W : f = \tau \circ t$

Definición 1.8 (Producto Tensorial)**.** Sea U, V dos $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. Cualquier par universal para la bilinealidad $(T, t : U \times V \to T)$ es un producto tensorial de U, V.

El espacio vectorial T se denota por $U \otimes V$.

El mapeo t se dice el mapa tensorial y los elementos de $U \otimes V$ se llaman tensores.

Los tensores en la imagen de t se dicen descomposibles y se denotan por:

$$u \otimes v := t(u, v) \ \forall (u, v) \in U \times V$$

Teorema 1.9 ($\mathrm{Mult}^2(U, V; W) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$)**.** *Sean U, V, W tres $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. El mapeo que asigna a cada forma bilineal su morfismo mediante es el un isomorfismo entre las transformaciones lineales del producto tensorial $U \otimes V$ a W y las formas bilineales sobre $U \times V$ a W. Esto es:*

$$\mathrm{Mult}^2(U, V; W) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$$

Demostración.

$$\forall f \in \mathrm{Mult}^2(U, V; W) \ \exists! \tau_f \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) : f = \tau \circ t$$

Luego definimos $f \mapsto \tau_f$.

Es morfismo mediante.

Además, es inyectivo: $\tau_f = \tau_g \Rightarrow f = \tau_f \circ t = \tau_g \circ t = g$

Y es sobreyectivo: $\forall \tau \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, W), f := \tau \circ t$ □

Teorema 1.10 ($\otimes$ Asociativo)**.** *El operador entre espacios vectoriales $\otimes$ es asociativo. Es decir, se verifica:*

$$(U_1 \otimes U_2) \otimes U_3 \cong U_1 \otimes (U_2 \otimes U_3)$$

Demostración. Basta tomar:

$$\hom((U_1 \otimes U_2) \otimes U_3; \cdot) \cong \mathrm{Mult}^2((U_1 \otimes U_2), U_3; \cdot) \cong \mathrm{Mult}^3(U_1, U_2, U_3; \cdot) \cong \ldots \cong \hom(U_1 \otimes (U_2 \otimes U_3); \cdot)$$

La unicidad del par universal hace que ambos sean isomorfos para la familia de medidas $\mathcal{H}$ de transformaciones lineales y $\mathcal{F}$ conjunto de funciones (para este caso, mapeos trilineales).

Luego son isomorfos. $\square$

Definición 1.11 (Producto Tensorial)**.** Definimos el producto tensorial del conjunto de espacios vectoriales $\{E_i\}_{i=1}^r$ como:

$$\bigotimes_{i=1}^{r} E_i := \left(\bigotimes_{i=1}^{r-1} E_i \right) \otimes E_r$$

Alternativamente usamos la notación $E^{\otimes r}$ cuando sea producto tensorial sobre el mismo espacio.

Teorema 1.12 ($\mathrm{Mult}^r(\{E_i\}_{i=1}^r; F) \cong \mathrm{Hom}(\bigotimes \{E_i\}_{i=1}^r; F)$)**.** *El conjunto de formas multilineales es isomorfa al conjunto de transformaciones lineales sobre el producto tensorial iterado*

Demostración. Por inducción sobre el orden de la forma multilineal $\square$

Teorema 1.13 (Producto Tensorial Dual)**.** *Sean U, V espacios vectoriales.*

$$\exists! \theta \in \hom(U^* \otimes V^*; (U \otimes V)^*)$$

Donde:

$$\theta(A \otimes B) = A \odot B$$

Y:

$$(A \odot B)(u \otimes v) = A(u)B(v) \in \mathbb{K}$$

Demostración. El mapeo:

$$\begin{aligned} \circ_{(A,B)} : U \times V &\to \mathbb{K} \\ (u, v) &\mapsto A(u)B(v) \end{aligned}$$

Es bilineal (fijemos un vector, el mapeo es lineal en el otro vector) y $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial. Luego según diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\circ"'] & U \otimes V \arrow[d, dashed, "\tau"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Por tanto, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\exists! \tau_{(A,B)} : U \otimes V &\to \mathbb{K} \\
u \otimes v &\mapsto A(u)B(v)
\end{aligned}
$$

Pues el $\circ_{(A,B)}$ está definido a partir de A, B.
Luego existe un mapeo:

$$
\begin{aligned}
\odot : U^* \times V^* &\to (U \otimes V)^* \\
(A, B) &\mapsto \tau_{(A,B)}
\end{aligned}
$$

La cual es bilineal:

$$
\begin{aligned}
((\alpha A + B) \odot C)(u \otimes v) &= (\alpha A + B)(u)C(v) \\
&= (\alpha A(u) + B(u))C(v) \\
&= \alpha A(u)C(v) + B(u)C(v) \\
&= \alpha (A \odot C)(u \otimes v) + (B \odot C)(u \otimes v)
\end{aligned}
$$

Luego definen la misma transformación lineal entre espacios vectoriales (como función tienen la misma regla de correspondencia y dominio/rango).
Luego, por su bilinealidad:

$$
\begin{tikzcd}
U^* \times V^* \arrow[r, "t^*"] \arrow[dr, "\odot"'] & U^* \otimes V^* \arrow[d, dashed, "\theta"] \\
& (U \otimes V)^*
\end{tikzcd}
$$

De donde:

$$
\begin{aligned}
\exists! \theta : U^* \otimes V^* &\to (U \otimes V)^* \\
A \otimes B &\mapsto A \odot B
\end{aligned}
$$

Es inyección:

$$
0 = \theta(C)(u \otimes v) = \sum_{i=1}^{n} \theta(A_i \otimes B_i)(u \otimes v) = \sum_{i=1}^{n} A_i(u)B_i(v)
$$

Luego: $\sum_{i=1}^{n} A_i(u)B_i(\cdot)$ es un mapeo nulo. Pero el conjunto $\{B_i\}$ es l.i. Luego $A_i(u) = 0$.
Por arbitrareidad de u los operadores A_i son nulos. De donde $C = 0$ por expresión única. □

Corolario 1.14. *θ es una inmersión y un isomorfismo para U, V finito dimensionales.*
Esto es, $A \odot B$ es un funcional lineal de productos tensoriales

Teorema 1.15 (Representación de una forma lineal como un Tensor)**.** *Toda forma multilineal puede ser escrita como un tensor*

Demostración. Basta usar el siguiente argumento sobre los isomorfismos:

$$\mathrm{Mult}^r\left(\{E_i\}_{i=1}^r;\mathbb{K}\right) \cong \hom\left(\bigotimes_{i=1}^r E_i;\mathbb{K}\right) = \left(\bigotimes_{i=1}^r E_i\right)^* \cong \bigotimes_{i=1}^r E_i^*$$

□

Proposición 1.16 (Expresión de Forma multilineal como Tensor)**.** *Toda forma $r-$lineal sobre $\mathbb{K}$ admite la siguiente escritura:*

$$M(v_1,\dots,v_r) = \sum_{i_j\in I_j, j\in\{1,\dots,r\}} T_{i_1,\dots,i_r}(A^{i_1}\otimes\cdots\otimes A^{i_r})(v_1,\dots,v_r)$$

De donde se obtiene la siguiente forma de escritura para espacios vectoriales de dimensión finita:

$$M(v_1,\dots,v_r) = \sum_{i_j\in I_j, j\in\{1,\dots,r\}} T_{i_1,\dots,i_r}(A^{i_1}\odot\cdots\odot A^{i_r})(v_1\otimes\cdots\otimes v_r)$$

De donde se obtiene:

$$M(v_1,\dots,v_r) = \sum_{i_j\in I_j, j\in\{1,\dots,r\}} T_{i_1,\dots,i_r}A^{i_1}(v_1)\dots A^{i_r}(v_r)$$

Demostración. Teorema anterior □

Corolario 1.17 (Representación de forma multilineal sobre un mismo espacio como tensor)**.** *Sea M una forma $r-$lineal sobre el mismo espacio vectorial finito dimensional E. Se obtiene:*

$$M(v_1,\dots,v_r) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r\subseteq I} T_{i_1,\dots,i_r}e^{i_1}(v_1)\dots e^{i_r}(v_r)$$

Es decir:

$$M(v_1,\dots,v_r) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r\subseteq I} T_{i_1,\dots,i_r}v_1^{i_1}\dots v_r^{i_r}$$

Donde v_i^j es la coordenada $j-$ésima del vector $i-$ésimo.
Por tanto:

$$M(v_1,\dots,v_r)\in\mathbb{K}[v_i^j]$$

1.2 Propiedades Básicas

Definición 1.18 (Derivada de Frechet en espacios normados)**.** Una función $f: E\to F$ entre los espacios normados E,F es diferenciable (o derivable) en el sentido de Frechet en un punto x_0 si se verifica que:

$$\exists T\in L(E;F): \lim_{x\to x_0}\frac{||f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)||_F}{||x-x_0||_E} = 0$$

Si es derivable en el sentido de Frechet en cada punto de un conjunto, se dice que es derivable en el sentido de Frechet en un conjunto.

La transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se llama la derivada de Frechet de f en el punto x_0 y se denota por $Df(x_0)$.

Comentario 1.19. La derivada de Frechet depende de la elección de la norma (o del filtro para espacios vectoriales topológicos). Para el caso que nos atañe, utilizaremos las siguientes propiedades de la derivada de Frechet:

1. La derivada de Frechet para un espacio vectorial topológico Hausdorff, en caso de existir, es única.
2. Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la elección de norma no importa debido a la equivalencia de todas las normas. De donde el límite es único y por tanto la derivada es única.

Proposición 1.20 (Unicidad de la derivada)**.** *La derivada de Frechet para un espacio vectorial topológico Hausdorff, en caso de existir, es única.*

Definición 1.21 (Derivada Parcial)**.** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función derivable en el sentido de Frechet en un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definamos la función:

$$\begin{aligned} Df : E \subseteq \mathbb{R}^n &\to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \\ x &\mapsto Df(x) \end{aligned}$$

La definición está justificada por la existencia de la transformación asociada a un punto y su unicidad.

Definimos la derivada parcial de la función f con respecto de la variable x_i como la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \pi_i \circ Df$$

Definición 1.22 (Derivadas parciales de componentes)**.** Decimos que las derivadas parciales de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son las derivadas parciales de cada una de sus funciones componentes f_i

Proposición 1.23 (Derivadas parciales de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)**.** *Las derivadas parciales de f son las funciones:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} := \pi_{i,j} \circ Df$$

Definición 1.24 (Clase C^1)**.** Una función derivable en el sentido de Frechet en un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice de clase $C^1(E)$ si todas sus derivadas parciales son continuas en E

Definición 1.25 (Derivada de orden superior)**.** Definimos la derivada de Frechet de orden $r \in \mathbb{N}$ en x_0, con $r > 1$, como aquella forma $r-$lineal sobre $\mathbb{K}$ que verifique:

$$\exists A \in L(\mathbb{R}^n; L^{r-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)) \cong L^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) : \lim_{x \to x_0} \frac{||D^{r-1}f(x) - D^{r-1}f(x_0) - A(x - x_0)||_{L^{r-1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}}{||x - x_0||_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Denotamos a dicha forma A como $D^r f(x_0)$

Definición 1.26 (Derivadas parciales de $D^r f(x_0)$)**.** Las derivadas parciales de orden $r-$ésimo se definen como:

$$\frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}(\cdot) := \pi_i \circ D^r f(\cdot)(e_{j_1} \dots e_{j_r})$$

Denotaremos la derivada parcial (cuando sea conveniente) como $\pi_i \circ D_{j_1 \dots j_r} f(\cdot)$

Teorema 1.27 (Equivalencia de definiciones de derivada parcial)**.** *La definición de derivada parcial dada coincide con la dada en los cursos de análisis. Esto es,*

$$\frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{\pi_i \circ D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0 + e_r h) - \pi_i \circ D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0)}{h}$$

Demostración. Basta tomar lo siguiente (la primera línea por límite de función vectorial es vector de límites de funciones componentes, el caso base es la definición de de derivada dada y por inducción):

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{\pi_i \circ D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0 + e_r h) - \pi_i \circ D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0)}{h} \\
&= \pi_i \left(\lim_{h \to 0} \frac{D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0 + e_r h) - D_{j_1 \dots j_{r-1}} f(x_0)}{h} \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \pi_i (D_{j_1 \dots j_r} f(x_0)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \pi_i \circ D_{j_1 \dots j_r} f(x_0)
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.28 ($D^r f(x_0)$ simétrica)**.** *La forma $D^r f(x_0)$ es una forma simétrica.*

Demostración. Inmediato, basta con tomar la definición de derivada parcial según el análisis. Luego las componentes son iguales por teorema de Schwarz en el caso de dos variables. Esto quiere decir que para cualquier permutación, resulta la misma derivada parcial. Por tanto, es simétrica por ser invariante bajo permutaciones □

Comentario 1.29. Por la teoría antes trabajada sobre formas multilineales. Sabemos que la norma de la derivada puede calcularse según el algoritmo anterior.

Proposición 1.30 (Cálculo de la derivada $r-$ésima)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se cumple la expresión:*

$$D^r f(x_0) v^r = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\{i_r\} \subseteq I} \frac{\partial^r f_1}{\Pi \partial x^{(i_j)}}(x_0) v^{i_r} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{\{i_r\} \subseteq I} \frac{\partial^r f_m}{\Pi \partial x^{(i_j)}}(x_0) v^{i_r} \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ r veces diferenciable en x_0. Si tomamos $D^r f$ podemos descomponerla de la siguiente forma:

1. Sabemos que $D^r f(x_0) v^r$ es un vector en $\mathbb{R}^m$

2. Sea $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la primera componente de la función, se cumple que $D^r f_1 \in \text{Mult}^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

$$D^r f_1(x_0)(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} T_{i_1,\ldots,i_r} v_1^{i_1} \ldots v_r^{i_r}$$

De donde, podemos obtener:

$$D^r f_1(x_0)(e_{h_1}, \ldots, e_{h_r}) = \sum_{\{i_r\} \subseteq I} T_{i_1,\ldots,i_r} e_{h_1}^{i_1} \ldots e_{h_r}^{i_r} = \sum_{\{i_r\} \subseteq I} T_{i_1,\ldots,i_r} \delta_{h_1,i_1} \ldots \delta_{h_r,i_r} = T_{h_1,\ldots,h_r}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
D^r f_1(x_0) &= DD^{r-1} f_1(x_0) \in L(\mathbb{R}^n; L^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) \\
\Rightarrow \frac{\partial D^{r-1} f_1}{\partial x_{h_i}}(x_0) &= D^r f_1(x_0) e_{h_1} \in L^{r-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{R}^n; L^{r-2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 D^{r-2} f_1}{\partial x_{h_i} \partial x_{h_2}}(x_0) = \frac{\partial \left(\frac{\partial D^{r-1} f_1}{\partial x_{h_2}} \right)}{\partial x_{h_2}}(x_0) &= [D^r f_1(x_0) e_{h_1}] e_{h_2} \in L^{r-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{R}^n; L^{r-2}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) \\
&\vdots \\
\Rightarrow \frac{\partial^r f_1}{\Pi_{j=1}^r \partial x^{(h_j)}}(x_0) &= [[\ldots [D^r f_1(x_0) e_{h_1}] \ldots] e_{h_{r-1}}] e_{h_r} = D^r f_1(x_0)(e_{h_1}, \ldots, e_{h_r}) \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow T_{h_1,\ldots,h_r} &= \frac{\partial^r f_1}{\Pi_{j=1}^r \partial x^{(h_j)}}(x_0) \\
D^r f_1(x_0)(v_1, \ldots, v_r) &= \sum_{\{i_j\}_{j=1}^r \subseteq I} \frac{\partial^r f_1}{\Pi_{j=1}^r \partial x^{(h_j)}}(x_0) v_1^{i_1} \ldots v_r^{i_r}
\end{aligned}$$

Análogo para las demás funciones componentes

3. Sabemos que para la primera derivada se cumple:

$$\begin{aligned}
Df(x_0) = \begin{bmatrix} Df_1(x_0) & \ldots & Df_m(x_0) \end{bmatrix}^t &\Rightarrow Df(\cdot) = \begin{bmatrix} Df_1(\cdot) & \ldots & Df_m(\cdot) \end{bmatrix}^t \\
&\Rightarrow D\Big(Df(\cdot)\Big)(x_0) = \Big[D\Big(Df_1(\cdot)\Big)(x_0) \quad \ldots \quad D\Big(Df_m(\cdot)\Big)(\\
&\vdots \\
&\Rightarrow D^r f(x_0) = \begin{bmatrix} D^r f_1(x_0) & \ldots & D^r f_m(x_0) \end{bmatrix}^t
\end{aligned}$$

Pues recordemos que $Df : \mathbb{R}^n \to F = L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ mapeo entre espacios finito dimensionales. Luego la escritura queda dada de la misma forma. Análogo para los casos siguientes.

4. Luego se tiene que:

$$D^r f(x_0)v^r = \begin{bmatrix} D^r f_1(x_0) \\ \vdots \\ D^r f_m(x_0) \end{bmatrix} v^r = \begin{pmatrix} \sum_{\{i_r\}\subseteq I} \frac{\partial^r f_1}{\Pi \partial x^{(i_j)}}(x_0)v^{i_r} \\ \vdots \\ \sum_{\{i_r\}\subseteq I} \frac{\partial^r f_m}{\Pi \partial x^{(i_j)}}(x_0)v^{i_r} \end{pmatrix}$$

□

Comentario 1.31. Algunas consideraciones sobre el cálculo de derivadas de orden superior:

1. Recordar que la derivada parcial forma por α índices aparece $\binom{n+k-1}{k}$ veces por permutaciones de los coeficientes. Luego podemos calcular de forma más sencilla utilizando esta propiedad. Así, en vez de colocar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}v_2 v_1$ podemos colocar $2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}v_1 v_2$.

2. Así mismo, se pueden calcular las derivadas parciales de forma recursiva, renombrando variables.

Se verán ambas consideraciones en el próximo ejemplo.

Corolario 1.32 (Cálculo de derivadas de orden superior de función polinomial)**.** *Una función polinomial tiene como derivada de orden k aplicada sobre el vector v unas $k-$veces la función polinomial obtenida de extraer los monomios de grado k de cada función componente, multiplicando a cada coeficiente la cantidad de permutaciones del monomio dado por $\binom{n+k-1}{k}$ y los valores que aparecen tras multiplicar por los iterados de los exponentes en la iteración.*

Ejemplo 1.33. Calcularemos algunas derivadas de la función:

$$f(x,y,z) = (y + 4xz + x^3 + 3xy^2 + yz^4, x^3 + y^3 + x^5)$$

sobre el vector v. En este caso tenemos:

1. Primera derivada

$$\begin{aligned} Df(x_0,y_0,z_0)v &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)v_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)v_3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)v_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4z_0 + 3x_0^2 + 3y_0^2)v_1 + (1 + 6x_0y_0 + z_0^4)v_2 + (4x_0 + 4y_0z_0^3)v_3 \\ (3x_0^2 + 5x_0^4)v_1 + 3y_0^2 v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Segunda derivada, aprovechando las derivadas parciales que ya calculamos, podemos derivar renombrando x_0 por x, y_0 po y y z_0 por z:

$$D^2 f(x_0,y_0,z_0)v^2 = \begin{pmatrix} 6x_0v_1^2 + 6y_0v_1v_2 + 4v_1v_3 + 6y_0v_2v_1 + 6x_0v_2^2 + 4z_0^3v_2v_3 + 4v_3v_1 + 4z_0^3v_3v_2 + 12 \\ (6x_0 + 20x_0^3)v_1^2 + 6y_0v_2^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6x_0v_1^2 + 12y_0v_1v_2 + 8v_1v_3 + 6x_0v_2^2 + 8z_0^3v_2v_3 + 12y_0z_0^2v_3^2 \\ (6x_0 + 20x_0^3)v_1^2 + 6y_0v_2^2 \end{pmatrix}$$

3. Tercera derivada:

$$D^3 f(x_0,y_0,z_0)v^3 = \begin{pmatrix} 12v_1^3 + 6v_1v_2^2 + 12v_1v_2^2 + 12z_0^2v_2v_3^2 + 24z_0^2v_2v_3^2 + 24y_0z_0v_3^3 \\ (6 + 60x_0^2)v_1^3 + 6v_2^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12v_1^3 + 18v_1v_2^2 + 36z_0^2v_2v_3^2 + 24y_0z_0v_3^3 \\ (6 + 60x_0^2)v_1^3 + 6v_2^3 \end{pmatrix}$$

4. Cuarta derivada:

$$D^4 f(x_0,y_0,z_0)v^4 = \begin{pmatrix} 24z_0v_2v_3^3 + 72z_0v_2v_3^3 + 24y_0v_3^4 \\ 120x_0v_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96z_0v_2v_3^3 + 24y_0v_3^4 \\ 120x_0v_1^4 \end{pmatrix}$$

5. Quinta derivada:

$$D^5 f(x_0,y_0,z_0)v^5 = \begin{pmatrix} 24v_2v_3^4 + 96v_2v_3^4 \\ 120v_1^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120v_2v_3^4 \\ 120v_1^5 \end{pmatrix}$$

6. Las demás derivadas son nulas.

7. Como caso adicional, haremos la segunda derivada de $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ puede expresarse según el Hessiano:

$$v^t H(f_1)(x_0,y_0,z_0)v^2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 6x_0 & 6y_0 & 4 \\ 6y_0 & 6x_0 & 4z_0^3 \\ 4 & 4z_0^3 & 12y_0z_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

8. Para nuestro caso, en el que trabajemos con derivadas sobre el origen, tendremos que usualmente se simplifican a los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
Df(0,0,0)v &= \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
D^2f(0,0,0)v^2 &= \begin{pmatrix} 8v_1v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2! \cdot 4v_1v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
D^3f(0,0,0)v^3 &= \begin{pmatrix} 3! \cdot v_1^3 + 2 \cdot 3 \cdot v_1v_2^2 \\ 3! \cdot (v_1^3 + v_2^3) \end{pmatrix} \\
D^4f(0,0,0)v^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
D^5f(0,0,0)v^5 &= \begin{pmatrix} 120v_2v_3^4 \\ 120v_1^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4! \cdot 5 \cdot v_2v_3^4 \\ 5! \cdot v_1^5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

De donde se comprueba que para campos polinomiales, sólo basta con considerar los monomios de grado igual que el orden y operar sobre los coeficientes por argumento combinatorio y de iteración de la derivada

Comentario 1.34. Con todo el preliminar anterior, tenemos la capacidad de calcular numéricamente las derivadas de orden arbitrario de campos vectoriales, los cuales no son más que funciones de un $\mathbb{K}-$e.v. finito dimensional sobre sí mismo.

Ahora queremos dotar al conjunto de funciones (por tanto, de campos) que tienen una cierta suavidad (En alguna clase C^k de funciones $k-$diferenciables con $k-$ésima derivada continua) de una topología que nos permita hacer argumentos de límite y nos permita entender el comportamiento local de las ecuaciones diferenciales definidas por campos cercanos y el cómo se relacionan entre sí.

Definición 1.35 (Clase C^k)**.** Decimos que una función es de clase C^k si todas sus derivadas parciales son continuas (tomas las componentes de su forma tensorial).

Definición 1.36 (Polinomio de Taylor)**.** Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función de clase C^r. Definimos el polinomio de Taylor de orden $m \leq r$ de f en a como:

$$P_{f,a}^k(h) := f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2!}D^2f(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!}D^mf(a)h^m$$

Es decir:

$$P_{f,a}^k(h) := \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}D^if(a)h^i$$

Comentario 1.37. Recordemos que por notación de Álgebra Multilineal obtuvimos que debido a la escritura de las formas multilineales de un vector iterado, se puede escribir a los vectores miembros de la suma que conforman el polinomio de Taylor:

$$D^kf(x)h^k = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \partial^\alpha f(x) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

Agrupando aquellos términos con sumas iguales bajo el símbolo combinatorio:

$$\binom{k}{\alpha_1, \dots, \alpha_n} := \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

Teorema 1.38 (Fórmula de Taylor para funciones reales)**.** *Sea $U \in \tau_{\mathbb{R}^n}$, $f : U \to \mathbb{R}$ función $m+1-$veces diferenciable en U y $h \in \mathbb{R}^n : \mathcal{L}[a, a+h] \subseteq U$.*

Se cumple que:

$$\exists \xi = \xi(h) \in \mathcal{L}[a, a+h] : f(a+h) = P^m_{f,a}(h) + \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(\xi) h^{m+1}$$

Además, se cumple:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P^k_{f,a}(h)}{||h||^k} = 0$$

Para $k \geq 2$ puede reducirse la condición de f a $k-1$ diferenciable en U y $D^{k-1}f$ diferenciable en x.

Demostración. Para $n = 1$: Esta demostración es parte de los cursos de Análisis. La demostración será una paráfrasis de aquella del texto de Rudin

$$M := \frac{f(a+h) - P^m(f,a)(h)}{h^{m+1}}$$
$$g(x) := f(x) - P^m(f,x)(h) - M(x-a)^{m+1} \forall x \in [a, a+h]$$
$$\Rightarrow \forall l \in \{0, \ldots, m+1\}, \forall x \in [a, a+h], D^k g(x) = D^k f(x) - D^k P^k(f,a)(h) - \left(\Pi^{r=0}_{m+1} m+1-r \right) M(x -$$
$$\Rightarrow D^k g(a) = D^k f(a) - D^k P^k(f,a)(h) - \left(\Pi^{r=0}_{m+1} m+1-r \right) M(a-a)^{m+1-k} = \begin{cases} 0, k \in \{0, \ldots, m\} \\ D^{m+1} f(a) - (m+1)! M \end{cases}$$

Procediendo inductivamente:

$$\begin{aligned} g(a) = 0 \wedge g(a+h) = 0 &\Rightarrow \exists x_1 \in (a, a+h) : Dg(x_1) = 0 \\ (D^k g(a) = 0 \wedge D^k g(x_k) = 0) &\Rightarrow \exists x_{k+1} \in (a, x_k) : Dg(x_{k+1}) = 0 \\ &\Rightarrow \exists x_{m+1} \in (a, x_{m+1}) : Dg(x_{m+1}) = 0 \\ &\Rightarrow \exists x_{m+1} \in (a, x_{m+1}) : D^{m+1} f(x_{m+1}) - (m+1)! \frac{f(a+h) - P^m(f,a)(h)}{h^{m+1}} = \\ &\Rightarrow \exists x_{m+1} \in (a, x_{m+1}) : \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} D^{m+1} f(x_{m+1}) = f(a+h) - P^m(f,a)(h) \\ &\Rightarrow \exists x_{m+1} \in (a, x_{m+1}) : f(a+h) = P^m(f,a)(h) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} D^{m+1} f(x_{m+1}) \end{aligned}$$

La segunda parte es inmediata por la división definida en $\mathbb{R}$

Para $n > 1$:

Esta demostración será un paráfrasis del texto de Daniel Azagra Rueda. Definamos el camino $g(t) := f(a+th)$ para $t \in [0,1]$. Por el caso $n = 1$:

$$\exists t_0 \in [0,1] : g(1) = g(0) + P^m(g, a+h) + \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} g(t_0)$$
$$\Rightarrow f(a+h) = P^m(f,a)(h) + \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(a + t_0 h)$$

La segunda parte resulta de considerar, dado un $v \in B_1[0]$ y fijando un t número real suficientemente pequeño, el siguiente argumento:

$$f(x+tv) - P^k(f,x)(tv) = f(x+tv) - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} D^j f(x)(tv)^j = f(x+tv) - f(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{t^j}{j!} D^j f(x) v^j$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_{t,v} \in (0,t) : \frac{f(x+tv) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{t^j}{j!} D^j f(x) v^j}{t^k} = \frac{Df(x+\alpha_{t,v}v)(v) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_{t,v}^{j-1}}{j!} D^j f(x) v^j}{k\alpha_{t,v}^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \exists \beta_{t,v} \in (0,t) : \frac{f(x+tv) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{t^j}{j!} D^j f(x) v^j}{t^k} = \frac{Df(x+\alpha_{t,v}v)(v) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_{t,v}^{j}}{j!} D^j f(x) v^j}{k\alpha_{t,v}^{k-1}}$$

$$= \frac{D^2 f(x+\beta_{t,v}v)(v) - \sum_{j=2}^{k} \frac{\beta_{t,v}^{j-2}}{j!} D^j f(x) v^j}{k(k-1)\beta_{t,v}^{k-2}}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \exists \gamma_{t,v} \in (0,t) : \frac{f(x+tv) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{t^j}{j!} D^j f(x) v^j}{t^k} = \frac{D^{k-1} f(x+\gamma_{t,v}v)(v) - \sum_{j=k-1}^{k} \frac{\gamma_{t,v}^{j-2}}{j!} D^j f(x) v^j}{k!\gamma_{t,v}}$$

$$\lim_{\gamma_{t,v} \to 0^+} \frac{D^{k-1} f(x+\gamma_{t,v}v)(v) - D^{k-1} f(x) v^{k-1} - \gamma_{t,v} D^k f(x) v^{k-1}}{k!\gamma_{t,v}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{t^j}{j!} D^j f(x) v^j}{t^k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P_{f,a}^k(h)}{||h||^k} = 0$$

□

Comentario 1.39. Definimos la noción auxiliar de resto de Taylor como:

$$R_a^m f := f(x) - P_{f,a}^m(x-a)$$

1.3 Derivación Combinatoria

2 Integral de Bochner

Uno de los principales propósitos es tratar de identificar las principales propiedades de funciones de manera geométrica. Ahora bien, en este proceso debemos considerar la integración de funciones con derivada de orden superior, sin embargo, esto sólo es posible si consideramos antes qué significa integrar sobre un espacio vectorial. Para esto, debemos verificar que haya coincidencia con el concepto de espacio de medida usual. Una de nuestras herramientas es la integral de Bochner.

2.1 Integral sobre tensores

2.2 Cálculo sobre espacios de Banach