Capítulo 4

Enteros

Nuestro objetivo será llegar a construir los números enteros. Desarrollar sus propiedades básicas. Introducirnos a la teoría de números con su visualización. Finalmente, estudiaremos algunos tópicos de matemática discreta que vienen en examen de admisión y teoría de grafos.

4.1 Cociente

Recordamos que a la hora de introducir a las funciones, las definimos como relaciones con elemento de llegada único para cada elemento de salida. Es decir, que la función era un subconjunto del producto cartesiano, en el cual se verificaba que para todo elemento de entrada (lo que entra en la función) había un elemento único de salida (lo que sale de la función). Dijimos que por lo general, una relación dentro de dos conjuntos era un subconjunto del producto cartesiano. Su intuición recaía en que si queríamos relacionar objetos, teníamos que tomarlos de los conjuntos a los que cada uno pertenece y luego enlazarlos en un par. La función cumple perfectamente esta idea, pero falla a la hora de determinar si dos objetos son equivalentes en un contexto dado. Por ejemplo, tomemos a la función constante $f : x \mapsto 1$, ésta función toma varios objetos (del dominio) y los envía al número 1. No responde a una idea natural de equivalencia, pues no nos discierne cuáles son los equivalentes. ¿es el 1 equivalente a todo elemento del dominio? Si lo es a un conjunto en particular, ¿cuál es ese conjunto? ¿puedes darlo únicamente a partir de la definición de función? Si no, no podemos determinar cosas equivalentes en el sentido que buscamos (Dos cosas son equivalentes si puedo intercambiar una con otra en un contexto dado). Aún si suponemos que la función es inyectiva, tendríamos la equivalencia en el sentido de la biyección. Es decir, son equivalentes si un objeto se llama de forma distinta en el otro conjunto. Sin embargo, esto es demasiado restrictivo, queremos que objetos distintos, inclusive conjunto de objetos, sean equivalentes, intercambiables dentro de su respectivo contexto.

Visualmente, lo que queremos es dividir un conjunto en subconjuntos de forma que cada uno de ellos sea utilizado en reemplazo de los otros elementos del subconjunto.

Para que ésto tengoa sentido, introduciremos un tipo de relación sobre el producto cartesiano del conjunto consigo mismo, luego daremos propiedades que debería cumplir dicha relación, finalmente, veremos que éstas son equivalentes a partir el conjunto en conjuntos equivalentes

Definición 4.1.1 (Relación de Equivalencia)**.** Una relación $\equiv \subseteq A$ se dice de equivalencia si verifica las siguientes propiedades:

Reflexividad

$$x \in A \Rightarrow x \equiv x$$

Simétrica

$$x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$$

Transitiva

$$(x \equiv y) \wedge (y \equiv z) \Rightarrow x \equiv z$$

Comentario 4.1.2. Las propiedades anteriores son intuitivas con respecto a nuestra idea de reemplazo. En efecto, un objeto se puede reemplazar en un contexto consigo mismo. El reemplazo no debe depender del orden en el que se reemplacen. Si x, y son intercambiables y y, z son intercambiables, entonces intercambio x por y y luego por z y sería lo mismo que intercamnbiar x por z, ambos funcionando igual dentro del contexto dado.

Definición 4.1.3 (Clases de Equivalencia)**.** Dada una relación de equivalencia $\equiv \subseteq A$. Definimos, para todo $x \in A$, el conjunto:

$$[x]_{\equiv} := \{y \in A : y \equiv x\}$$

Dicho conjunto se llamará clase de equivalencia de x con respecto a la relación $\equiv$

Denotamos al conjunto de clases de equivalencia de una relación de equivalencia por:

$$\mathcal{P}(\equiv) := \{[x]_{\equiv} \subseteq A : x \in A\}$$

Comentario 4.1.4. Las clases de equivalencia serán los conjuntos donde encontraremos los objetos que serán reemplazables entre sí.

Definición 4.1.5 (Partición)**.** Una partición de un conjunto es una familia de subconjuntos que no se intersectan dos a dos y cuya unión es todo el conjunto. Es decir, una familia $\mathcal{P} := \{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ que verifique:

1.
$$\forall i, j \in I, (A_i \cap A_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j)$$

2.
$$\bigcup \mathcal{P} = A$$

Teorema 4.1.6 ($\mathcal{P} = \equiv$)**.**

Demostración. $\square$

Comentario 4.1.7. El teorema anterior justifica la intuición detrás del significado de equivalencia discutida con anterioridad.

4.2 Enteros

Visualización 4.2.1.

Definición 4.2.2 (Par neutro)**.** Decimos que los elementos de la diagonal de $\mathbb{N}^2$ se dicen pares equilibrados o neutros.

Es decir, los elementos del conjunto:

$$\Delta_{\mathbb{N}} := \{(a, a) \in \mathbb{N}^2 : a \in \mathbb{N}\}$$

Son los pares equilibrados o neutros

Definición 4.2.3 (Par Opuesto)**.** Definimos la función inversión:

$$\begin{aligned}(-1\cdot) : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}^2 \\ (a, b) &\mapsto (b, a)\end{aligned}$$

Y a la imagen de un par dado como par opuesto.

Proposición 4.2.4 (Suma con Opuesto es Neutro)**.** *Si sumamos un par con su par opuesto, resulta en un par neutro.*

Comentario 4.2.5. Queremos que la relación de equivalencia llame a dos pares equivalentes si tienen el mismo par opuesto. Es decir, si para el segundo par, al verse afectado por un movimiento contrario al que el primer par provoca, devenga en el par neutro. Esto es, que el efecto del primer par y del segundo sean indiscernibles al verse desde la óptica de sus contrarios.

Definición 4.2.6. Definimos a la relación positivo-negativo $\sim \subseteq \mathbb{N}^2$ según:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

Teorema 4.2.7 ($\sim$ es de equivalencia)**.** *La relación positivo-negativo $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. □

Comentario 4.2.8. La relación positivo-negativo cumple el objetivo del comentario anterior. En efecto, lo que afirma es que dos pares son equivalentes si $(a, b) + (-1\cdot)(c, d) \in \Delta_{\mathbb{N}}$. Que es lo que buscábamos.

Definición 4.2.9 (Enteros)**.** Definimos al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ como la partición de $\mathbb{N}^2$ con respecto a las clases de equivalencia inducidas por $\sim$.

Es decir:

$$\mathbb{Z} := \mathcal{P}(\sim)$$

Teorema 4.2.10 ($\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$)**.** *Todo número entero puede representarse mediante un natural con signo.*

Definición 4.2.11 (Operaciones en $\mathbb{Z}$)**.** Definimos a las operaciones en $\mathbb{Z}$ como aquellas inducidas sobre las clases de equivalencia con respecto a las operaciones de $\mathbb{N}^2$: