Capítulo 15

Complejos: funcion seno, coseno, identidad de euler, forma polar, polinomios en C

15.1 Complejos

Recordemos de los capítulos 4 y 8 (Sobre la construcción de los Enteros y Racionales respectivamente), que definíamos conjuntos numéricos a partir de clases de equivalencia, es decir, observamos un proceso natural de la realidad, como lo son los conteos en una dirección contraria a la natural y las partes de una repartición dada, y buscamos expresar de acuerdo a un par de nuestras etiquetas (números), el comportamiento de éste proceso, preservando las operaciones y a los números originales.

Más aún, pudimos ver que la existencia de éstos números tenía justificación a la hora de resolver las ecuaciones de la forma $x + a = 0$ y $dx = c$ con $a \in \mathbb{N}, a > 0$ y $c, d \in \mathbb{Z}, d \nmid c$. Éstas ecuaciones están relacionadas al proceso natural al que nos referíamos.

Una vez definido nuestro propósito, hicimos uso de equivalencias entre pares para llegar a nuestro cometido, agrupando los pares que representan fenómenos (pares de números) iguales.

En el capítulo 10 (Sobre la construcción de los Reales), notamos que podemos abstraer la idea de aproximación para referirmos a ciertos fenómenos, con respecto de los cuales los racionales resultaban insuficientes, y que, además, sólo podíamos entender al efectuar el paso al límite y aseverar que, dado que había un espacio que ocuparía un número con ciertas características, pero que no existía un racional en ese espacio, podíamos ”completarlo”, ”llengar los huecos”, mediante dicho proceso proceso de aproximación.

Tras observar este fenómeno, resolvimos en que era menéster usar clases de equivalencia con respecto a éste nuevo concepto de cercanía y distancia, sólo que en lugar de usar pares, usamos secuencias.

También, vimos que la existencia de dichos números como posiciones nos permitió justificar la resolución de ecuaciones de la forma $x^n = a$, donde $a \in \mathbb{Q}, a > 0$. En este caso, inclusive podría decirse que hay muchas más ecuaciones, pues el argumento es posicional.

Dichas ecuaciones se resolvían de forma natural al ”darse” como definiciones de números.

En efecto,

1. Los números negativos no son más que aquellos que al sumarse a su número ”original” nos resulta en 0
2. Las fracciones no son más que números que al multiplicarse una cantidad dada de veces resulta en la unidad (el objeto del cual se empezó a repartir o fraccionar).
3. La raíz $n-$ésima de un número dado no es más que la clase formada por todas las secuencias cercanas entre sí, tal que cualquier secuencia de la clase, verifica que su $n-$ésima potencia se va acercando más y más al número dado. En general, que cualquier espacio que podemos aproximar sea definido por su aproximación

En éste capítulo, procederemos a observar el fenómeno natural de la rotación en el plano. Con ello, recordaremos del capítulo las matrices rotación R_α. Trataremos de resolver el problema de $x^2+1=0$ que indica que un número, al efectuar una transformación sobre sí mismo, resulte en llegar a la dirección contraria.

La herramienta de la rotación resuelve perfectamente éste problema, sin embargo, es demasiado general. La matriz de rotación involucra 4 números, mientras que lo esperado sería que sólo requiriésemos 2 números, que deberían corresponder estrictamente al ángulo y la madnitud. Además, se repite el patrón de las primeras construcciones, de usar el segundo objeto como solución de la ecuación y el primero como complemento para llegar a reconstruir el conjunto numérico inicial ($(0,a)$ representan los negativos en $\mathbb{Z}$, $(1,a)$ las fracciones que representan una porción del total en $\mathbb{Q}$). Luego como el problema ya no es topológico (no tiene que ver con distancias) como en la construcción de los reales, sino algebraico, como en las dos primeras, es natural optar por proceder como en la forma anterior.

Recordemos además, que del concepto de generado, podíamos decir que el número 0 en $\mathbb{Z}_n$ era la clase de equivalencia conformada por los múltiplos de p, es decir, el conjunto $p\mathbb{Z}$.

Comentario 15.1.1 ($\langle p(x)\rangle \leq \mathbb{R}[x]$)**.** Recordemos que el submódulo generado $\langle p(x)\rangle$ del conjunto de polinomios $\mathbb{R}[x]$ es un módulo y está formado por elementos de la forma:

$$\langle p(x)\rangle = \{\sum_{finita} a(x)p(x) \in \mathbb{R}[x] : a(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Este conjunto se dice un ideal, pero debido a que no queremos ahondar en la teoría de ideales y del álgebra commutativa, hemos optado por proceder con el generado en sentido de operaciones para así poder definir estos conceptos

Teorema 15.1.2 (Estructura algebraica de $\mathbb{C}$)**.** *El conjunto* $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ *es un cuerpo*

Definición 15.1.3 ($\mathbb{C}$ Números complejos)**.** Definimos el conjunto de los números complejos como el cuerpo $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$

Teorema 15.1.4 (Representación de los números complejos)**.** *Podemos representar a los números complejos con los polinomios de primer grado* $a+xb$

Demostración. Basta tomar el algoritmo de la división para tener que todo polinomio $p(x)$ verifica:

$$p(x) = (x^2+1)q(x) + r(x)$$

Donde $\partial r < 2$. Por tanto $r(x) = bx + a$. De donde concluimos que:

$$(x^2 + 1) \mid (p - r) \Rightarrow [p(x)] = [r(x)] = [bx + a]$$

Por tanto, basta conocer los coeficientes del resto para obtener una representación de la clase de equivalencia dada. $\square$

Proposición 15.1.5 (Operaciones en $\mathbb{C}$)**.** *Podemos verificar que las operaciones algebraicas sobre el cuerpo* $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$ *inducidas por el cociente con el submódulo generado, verifican (usando la representación dada en el teorema anterior):*

1. $(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x$

2. $(c + dx)(a + bx) = (ac - bd) + (ad + bc)x$

Demostración. Basta usar la suma y producto de polinomios en la forma descrita en la demostración anterior:

$$p_1(x)p_2(x) = ((x^2+1)q_1(x)+r_1(x))\cdot((x^2+1)q_2(x)+r_2(x)) = (x^2+1)(q_1(x)q_2(x)(x^2+1)+q_1(x)r_2(x)+q_2(x)r_1(x))+r_1(x)r_2(x$$

Además:

$$(c+xd)(a+xb) = ac+(ad+bc)x+bdx^2 = (ac-bd)+(ad+bc)x+bdx^2+bd = (ac-bd)+(ad+bc)x+bd(x^2+1)$$

De donde:

$$p_1(x)p_2(x) = (x^2 + 1)q(x) + (c + xd)(a + xb) = (x^2 + 1)(q(x) + bd) + (ac - bd) + (ad + bc)x$$

Lo cual verifica la segunda propiedad al tomar $r(x) = (ac - bd) + (ad + bc)x$.

La segunda propiedad es análoga y más sencilla, pues sólo consiste en repetir lo anterior con la suma. $\square$

Teorema 15.1.6 ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$)**.** *Se puede establecer el isomorfismo entre* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *y* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *con suma y producto definidos como:*

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

2. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Demostración. Basta tomar la representación anterior y utilizar la biyección $p(x) \mapsto r(x) \mapsto (a, b)$ $\square$

Notación 15.1.7. A partir de ahora denotaremos a la variable x con la letra i, para hacer referencia a que estamos describiendo un ”número” con dos números en el plano, con el segundo representando a una unidad ”imaginaria”, que asumimos cierta para verificar las operaciones.

En ese sentido, el cuerpo de los números complejos queda determinado a partir de la forma $a + ib$ o $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y según las dos operaciones descritas anteriormente. Éste es el enfoque usual a la hora de caracterizar a dicho conjunto

Proposición 15.1.8 ($i^2 = -1$)**.** *En el conjunto* $\mathbb{C}$. *La ecuación* $x^2 + 1 = 0$ *tiene como solución el número* i

Demostración. Basta notar que $i^2 = (0 + i)(0 + i) = (-1 + 0i) = -1$ según nuestra representación anterior. Es decir, que $i^2 + 1 = 0$ □

Proposición 15.1.9 ($i^n = \{\pm 1, \pm i\}$)**.** *Se verifica la siguiente propiedad sobre las potencias* $n-$*ésimas* ($\mathbb{N}$) *del número* i*:*

$$i^n = \begin{cases} i & , n \cong 1(\mod 4) \\ -1 & , n \cong 2(\mod 4) \\ -i & , n \cong 3(\mod 4) \\ 1 & , n \cong 0(\mod 4) \end{cases}$$

Demostración. El segundo caso fue probado en la proposición anterior. El cuarto caso se deduce iterando dos veces el segundo. El primero y terceroson resultado del segundo y el cuarto □

Comentario 15.1.10. Con esto, hemos obtenido nuestra idea de rotación de 90 grados en $\mathbb{C}$ utilizando únicamente 2 números, en lugar de los 4 usados durante la forma matricial. Si bien ésto ya era posible en la forma matricial según la representación de la matriz rotación con su ángulo únicamente, hemos ganado una estructura algebraica mucho más manejable que en la representación matricial. De hecho, también es posible construir al cuerpo de los complejos de forma matricial y caracterizar por isomorfismos las dos equivalencias anteriores. En la siguiente seccción induciremos la rotación por ángulo arbitraria y expondremos dicha construcción.

De momento, la segunda idea natural que surge es la de definir la magnitud, o la lejanía que tiene un número complejo del origen y la distancia entre dos números complejos. Con esto, podremos aprovechar la topología del plano $\mathbb{R}^2$ y usar argumentos de distancia y límite de forma rigurosa

Notación 15.1.11. Denotaremos a lo largo de los siguientes capítulos a los complejos con las letras $z, w, \gamma \in \mathbb{C}$.

Definición 15.1.12 (Parte Real e Imaginaria)**.**

Definición 15.1.13 (Conjugado)**.** Se define a la función conjugación como:

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = a + bi &\mapsto \hat{z} = a - bi \end{aligned}$$

Se dice que la imagen de un número complejo bajo conjugación es el par conjugado de dicho número complejo

Comentario 15.1.14. Es evidente que la conjugación como función en $\mathbb{R}^2$ es la función reflexión sobre el eje X: $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Se preserva la posicicón en el eje X, mientras que la posición en el eje Y se invierte en el sentido contrario.

Definición 15.1.15 (Módulo $|\cdot|$)**.** Definimos el módulo de un número complejo como la función:

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z = a + bi &\mapsto \sqrt{z \cdot \hat{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Dicha función puede escribirse como $|z| := \sqrt{z \cdot \hat{z}}$.

Comentario 15.1.16. Es evidente que si consideramos a un número complejo como un punto en el plano, el módulo es idéntico a la distancia pitagórica definida anteriormente.

Además, el módulo de un número real $a + 0i$ es su valor absoluto.

Proposición 15.1.17 (Propiedades del módulo)**.** *El módulo verifica las siguientes propiedades:*

1.

2.

3.

4.

Demostración. □

Corolario 15.1.18. *El módulo es una norma en* $\mathbb{C}$

Demostración. Ya se probó que la norma euclidea lo era en $\mathbb{R}^2$. Como a nivel de conjuntos, pueden interpretarse como iguales (en el sentido de escritura, pues $\mathbb{R}^2$ no tiene necesariamente ninguna estructura algebraica adjunta), entonces se cumple para $\mathbb{C}$ □

15.2 Identidad de Euler

Comentario 15.2.1. Recordemos que la serie exponencial:

$$\exp(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

Nos permitía tener propiedades útiles a la hora de considerarla en su desarrollo en la teoría de números reales. En primer lugar, es un polinomio y converge para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$, por lo que converge absolutamente y para cualquier norma que podamos asignar sobre cualquier serie formal, podremos obtener convergencia absoluta dominando la serie por la serie en su norma. En segundo lugar, que nos permite describir la noción de elevar un número a la potencia de algo $a^b = \exp(b \ln(a))$ mediante series de potencias, es decir, que podíamos calcular éstos números a partir de aproximaciones polinómicas.

De donde se nos induce a pensar, tras haber obtenido una descripción de la norma de $\mathbb{C}$, que podemos obtener una forma de calcular potencias en el sentido "complejo" a la hora de introducir valores imaginarios de la forma bi en la serie. Además, debido a la simetría de los valores de i^n (por ser los extremos del rombo de diagonal 1 en $\mathbb{R}^2$), podemos tener una idea de simetría a la hora de insertar tales valores en la serie.

Teorema 15.2.2 (Evaluación de $\exp(bi)$)**.** *Se tiene que la serie:*

$$\exp(bi) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(bi)^n}{n!}$$

converge absolutamente para todo $b \in \mathbb{R}$*.*
Además, tiene como parte real e imaginaria:

$$\Re(\exp(bi)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots$$
$$\Im(\exp(bi)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} = b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots$$

Considerando a $0 \in \mathbb{N}$

Demostración. □

Definición 15.2.3 (Función seno y Coseno)**.** Definimos a las funciones seno y coseno como la parte imaginaria y real de la función $exp(i\cdot)$ respectivamente:

$$\sin(x) := \Im(\exp(xi)) = \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$\cos(x) := \Re(\exp(xi)) = \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} x^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\exp(xi) = \cos(x) + i\sin(x)$$

Notación 15.2.4. También usaremos la siguiente notación:

$$\sin(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Comentario 15.2.5. De momento hemos repetido bastantes elementos de la teoría de geometría en $\mathbb{R}^2$ para dotar de propiedades interesantes a los números complejos. Es con la aparición de las funciones seno y coseno como tal que empezamos a ser capaces de hablar de una forma de representación del ángulo a partir de un número real, de la "definición analítica" de π, entre tantas otras propiedades. En ese sentido, la función seno no es más que el seno donde nace el análisis complejo (y la geometría plana procede a tener un paralelo analítico) y podemos empezar a expresar algunas ideas de forma numérica.

Proposición 15.2.6 (Paridad e Imparidad)**.** *La función coseno es par, la función seno es impar*

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Demostración.

□

Proposición 15.2.7 ($|\exp bi| = 1$)**.** *El módulo del número complejo* $\exp bi$ *es* 1 *para todo valor de* $b \in \mathbb{R}$

Demostración.

$$\begin{aligned} |\exp bi| &= \exp(bi) \cdot \overline{\exp(bi)} \\ &= \exp(bi) \cdot (\Re(\exp(bi)) - i\Im(\exp(bi))) \\ &= \exp(bi) \cdot (\cos(b) - i\sin(b)) \\ &= \exp(bi) \cdot (\cos(-b) + i\sin(-b)) \\ &= \exp(bi) \cdot (\Re(\exp(-bi)) + i\Im(\exp(-bi))) \\ &= \exp(bi) \cdot \exp(-bi) = \exp(bi - bi) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

□

Corolario 15.2.8 ($\exp(i\mathbb{R}) \subseteq S^1$)**.** *La imagen de la la función* $\exp(i\cdot)$ *con respecto a los números reales* $\exp(i\mathbb{R})$ *es un subconjunto del círculo unitario* $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$*.*

Proposición 15.2.9 ($\exists\pi$)**.** *Existe al menos un* $\alpha \neq 0$ *que verifica que* $\sin(\alpha) = 0$

Demostración. Sabemos que las raíces de una serie de potencias es discreta y que toda serie de potencias tiene representación única. Como no todos sus coeficientes son 0 para $\alpha \neq 0$, luego existe un valor $\beta : \sin(\beta) \neq 0$.

Por sin impar, se cumple que $\sin(-\beta) = -\sin(\beta) \neq 0$. De donde existen dos valores $\beta, -\beta$ verificando $\operatorname{sgn}(\sin(\beta)) \neq \operatorname{sgn}(\sin(-\beta))$. De donde por Teorema de Valor Medio, existe al menos un valor α entre $\beta, -\beta$ (en cualquier orden), para el cual $\sin(\alpha) = 0$ □

Definición 15.2.10 (π)**.** Definimos al doble de la primera raíz positiva de la función sin como π.

Proposición 15.2.11 (Evaluación en $\frac{a}{b}\pi$)**.** *Se cumplen las siguientes evaluaciones numéricas:*