Capítulo 14

Intro a la Geometría Analítica: Ecuaciones, Matrices, Determinantes, Producto Interno, Proyección, Cónicas

Pese a que hemos definido en el capítulo anterior las definiciones y Teoremas básicos de la geometría sintética, las técnicas desarrolladas en los tiempos de Euclides quedan (hasta cierto punto) desfasadas y desconectadas de la modelización real. Hay a lo menos 2 razones para abandonarlas, a saber:

1. No tienen relación directa con la teoría de conjuntos usual más allá del modo de proceder axiomático.

2. No podemos determinar resultados de forma numérica, ni realizar estimaciones.

El primero de estos defectos tiene que ver con el hecho de que no parece haber mayor utilidad en un sistema formal o teoría matemática desconectada de todos las construcciones ya elaboradas. Podríamos construir los naturales usando al segmento unitario e ir trabajando la teoría de números como en el texto de Euclides.

Asimismo, el análisis y los procesos de paso al límite dependen fuertemente de poder aproximar cosas. El punto de vista sintético es más semejante al algebraico en cuanto uno sólo puede deducir la igualdad de forma directa. Si bien hay argumentos de paso al límite, no podemos realizar de forma directa los cálculos como tal hasta no introducir el concepto de número, volviendo a la dificultad anterior.

Ambos problemas se resuelven tras introducir el concepto de coordenada de forma conjuntista y verificando que dichos objetos satisfacen los axiomas de Hilbert. Es decir, que dotamos a un espacio como conjunto de su geometría natural.

14.1 Módulos

Definición 14.1.1 (End(G))**.** Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Decimos de una función $f : G \to G$ que es un endomorfismo si se verifica:

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$$

Definición 14.1.2 (Módulos)**.** Sea $(G, +)$ un grupo abeliano y sea $R \in \text{End}(G)$ un anillo de endomorfismos de G.

A la dupla $M = ((G, +), R)$ se le llama un módulo.

Si R es un cuerpo, se dice que M es un $R-$espacio vectorial.

Notación 14.1.3. Normalmente R se escribe como $\mathbb{K}$ cuando sea un cuerpo y se dice que un espacio vectorial es un $\mathbb{K}-$módulo

Comentario 14.1.4. En los libros de texto y en la currícula estándar se ha desarrolla una aversión hacia el concepto de módulo y de espacio vectorial. En vez de eso, se verifican los axiomas de espacio vectorial como aquellos de grupo y de anillo independientemente y luego se desarrolla el resto de la teoria definiendo el espacio vectorial como un objeto independiente.

En este texto, debido a nuestra ardua labor, hemos logrado desarrollar todos los prerequisitos básicos para entender qué son estos objetos y cómo podemos aprovecharlos para entender mejor éstos objetos. La razón de nuestro proceder es que creemos que el resultado geométrico es más asequible de ésta manera.

Proposición 14.1.5 ($\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial)**.** *Definimos la operación suma sobre el conjunto $\mathbb{R}^n$ como:*

$$\begin{aligned} + : (\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R}^n \\ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) &\mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

Con esta suma se define la estructura de grupo $(\mathbb{R}^n, +)$

Además, definimos la función escalar como:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\to \text{End}(\mathbb{R}^n) \\ r &\mapsto (\lambda(r) : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (r \cdot a_1, \dots, r \cdot a_n)) \end{aligned}$$

donde $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el producto usual sobre $\mathbb{R}$.

Con esta función, definimos el anillo de endomorfismos Λ como la imagen de λ:

$$\Lambda := \lambda(\mathbb{R})$$

Es inmediato verificar que Λ es un anillo de endomorfismos y que λ puede reescribirse según la biyección $\lambda : \mathbb{R} \to \lambda(\mathbb{R})$. De donde de ahora en adelante escribiremos $\mathbb{R}$ en vez de Λ.

Entonces se tiene el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $((\mathbb{R}^n, +), \mathbb{R})$ al que denotaremos por $\mathbb{R}^n$

Demostración. □

Comentario 14.1.6. Podemos generalizar la proposición a módulos como en la siguiente proposición.

Proposición 14.1.7 (R^n es un $R-$módulo)**.** *De modo análogo a la proposición anterior, se puede obtener a partir de un anillo* R *el* $R-$*módulo* $((R^n,+),R)$

Demostración. Ejercicio. □

Visualización 14.1.8 (Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)**.** Vectores

Suma de Vectores

Escalamiento

Proposición 14.1.9 ($\mathbb{R}[x]$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial)**.** *El conjunto de polinomios* $\mathbb{R}[x]$ *induce una estructura natural de* $\mathbb{R}-$*módulo utilizando utilizando la operación* $+$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *y los endomorfismos dados por* $\lambda(\mathbb{R})$*, donde:*

$$\begin{aligned}\lambda : \mathbb{R} &\to \mathrm{End}(\mathbb{R}[x])\\ r &\mapsto (\lambda(r) : \sum_{j=1}^{n<\infty} a_j x^j \mapsto \sum_{j=1}^{n<\infty} (r\cdot a_j)x^j)\end{aligned}$$

donde $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *es el producto usual sobre* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. □

Comentario 14.1.10. Parece que un polinomio no es una lista varios números o ”etiquetas” acompañando a las variables x^j que representan las potencias de una variable. En ese sentido, podemos encontrar la biyección $\mathbb{R}[x]\mapsto\bigcup\mathbb{R}^n$ la tomando que a todo polinomio le asignamos una lista de sus coeficientes, con el tamaño dado por su grado.

Si bien esto es útil para dar una definición alternativa de polinomio, no es la única opción que tenemos.

En efecto, basta ver que los polinomios tienen la estructura de producto, la cual todavía no hemos aprovechado.

Si $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, es natural pensar que $\mathbb{R}[x]$ también es un $\mathbb{R}[x]-$espacio vectorial bajo su producto.

Sin embargo, recordemos que a $\mathbb{R}[x]$ le falta la división que envíe a todo polinomio a la unidad.

En vista de esto, debemos conformarnos con la estructura de $\mathbb{R}[x]-$módulo.

Estudiaremos esta estructura en la siguiente proposición.

Proposición 14.1.11 ($\mathbb{R}[x]$ es un $\mathbb{R}[x]-$módulo)**.** *El conjunto de polinomios* $\mathbb{R}[x]$ *induce una estructura natural de* $\mathbb{R}-$*módulo utilizando utilizando la operación* $+$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *y los endomorfismos dados por* $\lambda(\mathbb{R}[x])$*, donde:*

$$\begin{aligned}\lambda : \mathbb{R}[x] &\to \mathrm{End}(\mathbb{R}[x])\\ r(x) &\mapsto (\lambda(r) : p(x)\mapsto r(x)p(x))\end{aligned}$$

donde $\cdot : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ *es el producto usual sobre* $\mathbb{R}[x]$.

Demostración. □

Comentario 14.1.12. Pedimos al lector fé ciega a la utilidad de esta estructura para poder demostrar resultados más interesantes.

Definición 14.1.13 (Submódulo)**.** Decimos de un subconjunto de un $R-$módulo $A \subseteq M$ que es un submódulo si es a su vez un módulo con las estructuras inducidas según restricción.

Es decir, que si, tras restringir $+$ y R del módulo según:

$$\begin{aligned} +_{|_A} : A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned}$$

y según:

$$R_{|_A} = \{r_{|_A} \in \mathrm{End}(A) : r \in R\}$$

se cumple que $((A, +_{|_A}), R_{|_A})$ es un módulo, entonces se dice que $A \subseteq M$ es un submódulo.

Definición 14.1.14 (Subespacio Vectorial)**.** Decimos de un subconjunto de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial $A \subseteq \mathbb{V}$ que es un subespacio vectorial si es a su vez un espacio vectorial con las estructuras inducidas según restricción.

Notación 14.1.15. Usamos la notación $A \leq \mathbb{V}$ para decir que A es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$.

Comentario 14.1.16. Como las operaciones de A dependen de las de M y $\mathbb{V}$, no es necesario escribir explícitamente las operaciones de A.

Proposición 14.1.17 (Subespacio Vectorial es Submódulo)**.** *Un subconjunto es un subespacio vectorial si es un submódulo que verifica que el anillo de endomorfismos inducido según restricción es un cuerpo.*

Demostración. □

Proposición 14.1.18 (Caracterización de Subespacio)**.**

Demostración. □

Proposición 14.1.19 (Subespacios en $\mathbb{R}^2$)**.**

Proposición 14.1.20 (Subespacios en $\mathbb{R}^3$)**.**

Definición 14.1.21 (Independencia Lineal)**.** Un conjunto de

Proposición 14.1.22 (Caracterización de conjuntos l.i.)**.**

Proposición 14.1.23 (Existencia de conjuntos l.i. maximales)**.**

Definición 14.1.24 (Base)**.**

Definición 14.1.25 (Coordenadas con respecto de una base)**.**

Definición 14.1.26 (Transformación Lineal)**.** Una transformación lineal es un endomorfismo del grupo que define al espacio vectorial que conmuta con el anillo de endomorfismos que define al espacio vectorial. Es decir:

Proposición 14.1.27. *Una transformación lineal queda totalmente determinada por elementos de la base*

Definición 14.1.28 (Núcleo e Imagen)**.** Si el núcleo de la transformación lineal es 0 entonces se dice monomorfismo

Si la imagen es todo el espacio de llegada, entonces se dice epimorfismo

Teorema 14.1.29 (Teorema del Núcleo e Imagen)**.**

Demostración. □

Definición 14.1.30 (Coordenadas)**.** Un punto en coordenadas es cualquier elemento de un conjunto que pueda ser descrito a partir de uno u varios objetos que le correspondan en biyección las cuales recibirán el nombre de coordenadas del punto.

Es decir, cualquier elemento x de un conjunto A es un punto $x \in A$. Un punto en coordenadas queda determinado a partir de sus coordenadas, o lo que es lo mismo: Que haya B conjunto que no sea A y una biyección $f : B \to A$ de tal modo que $f(p) = x$ donde p será la coordenada de x con respecto de f.

Ejemplo 14.1.31. Un brazo robótico tiene 4 opciones de movimiento, puede moverse en la dirección 1,2,3 y 4 indicadas en la figura:

Podemos utilizar la representación de coordenadas utilizando el conjunto $[0, 1]^4$ con 0 en el mínimo posible de cada dirección y 1 en el máximo.

De este modo su movimiento puede modelarse según:

Sabiendo esto podemos obtener más detalles sobre cómo mejorar su diseño, observar cuáles son los patrones extraños, etc.

Comentario 14.1.32. El concepto de coordenada es más bien práctico que realmente matemático. Cuando veamos objetos geométricos más sofisticados, necesitaremos estudiarlos a partir de identificarlos con objetos más sencillos. En ese sentido, la coordenada no es nada más que una convención de escribir algo más complicado usando un objeto más sencillo mediante la biyección. Si la biyección preserva propiedades adicionales (estructura algebraica, topológica,, etc) la coordenada será útil para estudiar las propiedades de dicha estructura en su caso más simple.

Definición 14.1.33 (Isomorfismo)**.**

Teorema 14.1.34 ($E\mathbb{K}-$e.v. $\Rightarrow E \cong \mathbb{K}^{\dim E}$)**.** *Todo espacio vectorial finito dimensional es isomorfo a algún* $\mathbb{K}^n$

Demostración. □

Definición 14.1.35 (Coordenadas Cartesianas)**.** Decimos del espacio vectorial $((\mathbb{R}^n, +), \mathbb{R})$ que es un conjunto de coordenadas cartesianas.

Decimos que los elementos de un espacio vectorial finito dimensional están escritos en coordenadas cartesianas si usamos la identificación dada por el isomorfismo del teorema anterior.