Capítulo 13

Intro a la Geometría: Geometría plana, Angulos, triangulos, poligonos, Circumferencia, cuadrilatero

13.1 Axiomas de Hilbert

Definición 13.1.1 (Geometría de Incidencia)**.** Sea X un conjunto arbitrario y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familia de subconjuntos de X. Decimos que $(X, \mathcal{F})$ es una geometría de incidencia si se satisface:

1. $\forall x, y \in X (x \neq y), \exists ! \mathcal{L} \in \mathcal{F} : x, y \in \mathcal{L}$
2. $\forall \mathcal{L} \in \mathcal{F}, \exists x, y \in X (x \neq y) : x, y \in \mathcal{L}$
3. $\exists x, y, z \in X : (\nexists \mathcal{L} \in \mathcal{F} : x, y, z \in \mathcal{L})$

Las 3 condiciones anteriores se llaman axiomas de Incidencia.

Los elementos del conjunto X se dicen puntos. Los elementos del conjunto $\mathcal{F}$ se dicen líneas rectas (abreviaremos diciendo que son rectas).

Los puntos en una misma línea (recta) se dicen colineales. En ese sentido, se pueden reformular los axiomas diciendo que dos puntos siempre son colineales, que toda recta contiene al menos dos puntos y que existen 3 puntos no colineales.

Comentario 13.1.2. Podemos definir geometría de incidencia de forma más rigurosa utilizando un triple $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$. Ese triple, $\mathcal{P}$ es un conjunto de puntos, $\mathcal{B}$ un conjunto de bloques, I una relación de incidencia. En este sentido, usamos pIB con $p \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}$, cuando nos referimos a que p "está" en B. Es decir, extendemos la noción de estar en un objeto más allá de la relación de pertenencia, pues a la hora de entrar en contextos más patológicos/especiales, a veces los objetos que representan a bloques no tienen por que ser conjuntos de puntos.

Para nuestra discusión actual, sólo requerimos de la relación de pertenencia, por lo que nos limitaremos a usar $\in$ y familias de subconjuntos, en vez de conjuntos de bloques y puntos arbitrarios.

Proposición 13.1.3 ($\#\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \leq 1$)**.** *La intersección de dos recta distintas es a lo sumo un punto. Es decir, dos rectas tienen a lo sumo un punto en común.*

Demostración. Dos rectas distintas pueden tener un punto en común. Basta tomar por el axioma 3 a los tres puntos no colineales x, y, z. Tomemos a la recta $\mathcal{L}_{x,y}$ que contiene a x, y y la recta $\mathcal{L}_{y,z}$ que contiene a y, z,

Se verifica: $y \in \mathcal{L}_{x,y} \cap \mathcal{L}_{y,z}$.

Si fueran la misma recta, entonces $x \in \mathcal{L}_{x,y} = \mathcal{L}_{y,z}, z \in \mathcal{L}_{y,z}$, de donde $x, y, z \in \mathcal{L}_{x,y}$ lo cual contradice que los puntos sean no colineales.

De donde existen rectas distintas con intersección no vacía.

Ahora bien. Supongamos que haya dos rectas $\mathcal{L}, \mathcal{M}$, con más de dos puntos en común. Entonces, por primer axioma:

$$a, b \in X \Rightarrow \exists! \mathcal{L}_0 \in \mathcal{F} : a, b \in \mathcal{L}_0$$

Por unicidad: $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} = \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Es decir: Dos líneas rectas distintas pueden tener intersección vacía o no vacía. Si es no vacía, y tienen más de un punto de intersección, entonces son la misma, contradicción, luego sólo pueden tener un punto en la intersección. $\square$

Definición 13.1.4 (Líneas paralelas)**.** Dos líneas rectas distintas son paralelas si su intersección es no vacía. Es decir, si no tienen puntos en común.

Decimos que toda línea recta es paralela a si misma.

En cualquiera de los dos casos, usamos la notación $\mathcal{L} \parallel \mathcal{M}$ para decir que la línea recta $\mathcal{L}$ es paralela a la línea $\mathcal{M}$

Comentario 13.1.5. La definición anterior se puede reformular como que dos líneas rectas son no paralelas si su intersección es un conjunto unitario. Dos rectas son paralelas si no son no paralelas

Definición 13.1.6 (Axioma de Playfair/Player)**.** Para cada punto y cada línea recta, hay a lo sumo una línea recta conteniendo al punto dado y que sea paralela a la línea recta dada.

Es decir:

$$\#\{\mathcal{L}_0 \in \mathcal{F} : x \in \mathcal{L}_0 \parallel \mathcal{L}\} \leq 1$$

Comentario 13.1.7. El último axioma no es parte de los axiomas de la geometría de incidencia.

Definición 13.1.8 (Geometrías isomorfas)**.** Decimos que dos geometrías de incidencia $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ son isomorfas si existe una biyección $\varphi : X \to Y$ verificando:

$$\varphi : \mathcal{L} \in \mathcal{F} \mapsto \varphi(\mathcal{L}) \in \mathcal{G}$$

Es decir, que la imagen de líneas rectas sean líneas rectas. O lo que es lo mismo, que la biyección envíe líneas rectas en líneas rectas.

En tal caso, se denota $(X, \mathcal{F}) \overset{\varphi}{\cong} (Y, \mathcal{G})$ para referirnos a que ambas geometrías son isomorfas bajo φ

Definición 13.1.9 (Automorfismos)**.** Un automorfismo de una geometría de incidencia es un isomorfismo de geometrías de incidencia con respecto de sí mismas.

Definición 13.1.10 (Axiomas Relacionales)**.** Definimos la relación entre un punto y un par de puntos $* \subseteq X^2 \times X$ que verifica:

1. $(A, C, B) \in * \Rightarrow (A, B, C \in \mathcal{L}) \wedge ((C, A, B) \in *)$

2. $\forall A, B \in X(A \neq B), \exists C : (A, C, B) \in *$

3. $\forall A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{L}(\#\{A_1, A_2, A_3\} = 3), ((A_1, A_2, A_3)\Delta(A_2, A_3, A_1)\Delta(A_3, A_1, A_2))$

4. (Pasch) Sean A, B, C no colineales, con $\mathcal{L} : A, B, C \notin \mathcal{L}$. Se verifica:

$$((D \in \mathcal{L}) \wedge ((A, B, D) \in D)) \Rightarrow (\exists E \in \mathcal{L} : (A, C, E) \in *\Delta(B, C, E) \in *)$$

En ese caso decimos que la relación $*$ es "estar en medio" y denotamos $(A, C, B) \in * \iff A * B * C$ para decir que B está en medio, o entre el par de puntos A, C. Es decir, decimos que B está entre A y C

Comentario 13.1.11. Siguiendo la notación y la expresión de los axiomas, podemos reescribirlos como:

1. "Si un punto B está entre dos puntos A, C, entonces son colineales y B se ubica entre dos puntos C, A"

2. "Para dos puntos distintos A, B, existe un punto que extiende a la recta que pasa por A, B de forma que B está entre A, C"

3. "Dados 3 puntos distintos en una recta, uno de ellos está entre los otros dos"

Para el cuarto axioma relacional necesitamos introducir la definición se triángulo y segmento.

Notar que Δ se refiere a la disyunción exclusiva.

Definición 13.1.12 (Segmento)**.** Dados $A, B \in X$ puntos distintos, definimos al conjunto conformado por A, B y todos los puntos entre ellos como el segmento de recta $\overline{AB}$. Es decir:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C \in X : A * C * B\}$$

Proposición 13.1.13 ($\overline{AB} \mapsto \{A, B\}$)**.** *Todo segmento determina únicamente sus extremos. Es decir, para algún segmento C, existen 2 puntos únicos A, B, sus extremos, los cuales verifican que $C = \overline{AB}$*

Demostración. □

Definición 13.1.14 (Triángulo)**.** Definimos a un triángulo como la unión de 3 segmentos de recta $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC})$ inducidos por 3 puntos no colineales (A, B, C).

Los 3 piuntos A, B, C que inducen al triángulo se llaman los vértices del triángulo. Los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ se llaman los lados del triángulo. El triángulo se denota por triángulo ABC

Comentario 13.1.15. Podemos reformular el 4to axioma relacional (De Pasch) como: ”Dado un triángulo, si una recta entra por un lado (no pasa por ningún vértice y contiene un punto de algún lado del triángulo), entonces sale por uno de los otros lados”.

Proposición 13.1.16 ($ABC \mapsto \{A, B, C\}$)**.** *Todo triángulo determina únicamente sus vértices. Es decir, para algún triángulo T, existen 3 puntos únicos A, B, C, sus vértices, los cuales verifican que $T = ABC$*

Demostración. □

Proposición 13.1.17 (Separación del Plano)**.** *Sea $\mathcal{L}$ una línea recta. Entonces el conjunto de puntos $X - \mathcal{L}$ puede dividirse en dos subconjuntos no vacíos S_1, S_2 ($X - \mathcal{L} = S_1 \cup S_2 \wedge S_1 \cap S_2 = \emptyset$) que verifican:*

1. *Sean $A, B \notin \mathcal{L}$ puntos. Entonces* $(\exists i \in \{1, 2\} : A, B \in S_i) \iff \overline{AB} \cap \mathcal{L} = \emptyset$

2. *Sean $A, C \notin \mathcal{L}$ puntos. Entonces* $((A \in S_i) \wedge (C \in S_j))(i \neq j) \iff (\#\overline{AC} \cap \mathcal{L} = 1)$

Decimos que S_1, S_2 son los dos lados de $\mathcal{L}$
Para puntos que satisfagan el primer caso, se dice que están del mismo lado de $\mathcal{L}$.
Para puntos que satisfagan el segundo caso, se dice que están de lados opuestos de $\mathcal{L}$

Demostración. □

Proposición 13.1.18 (Separación de la Recta)**.**

Demostración. □

Definición 13.1.19 (Rayo)**.** Dados dos puntos distintos A, B, definimos al rayo $\overrightarrow{AB}$ como el conjunto consistiendo por A y los puntos de la única recta que pasa por A y B que verifican que están del mismo lado de A que el punto B (En la misma orientación con respecto de A que el punto B).

El punto A se dice el origen o vértice del rayo.

Definición 13.1.20 (Ángulo)**.** Un ángulo $\angle BAC$ es la unión de dos rayos $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ con un mismo vértice, con distinta línea recta que los induzca.

El interior de un ángulo $\angle BAC$ consiste en todos los puntos D que verifican que D, C están del mismo lado de la línea AC.

El interior de un triángulo ABC es el conjunto de puntos interiores de los 3 ángulos que lo conforman.

Teorema 13.1.21 (Teorema del Cruce)**.**

Definición 13.1.22 (Axiomas Relacionales)**.** 1.

2.

3.

Teorema 13.1.23 ($\cong$ es rel. de equivalencia)**.** *La congruencia es una relación de equivalencia en el conjunto de segmentos*

Demostración. □